Olympiades nationales de mathématiques 2021

Voie générale

Académie de Nice

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie («exercices nationaux»). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie («exercices académiques»). Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercices académiques

Résolution en équipe

Les candidats traitent **les deux exercices**.

Exercice 1 : Les nombres de Delannoy

Dans cet exercice, on se place dans un repère orthonormé d'origine O.

m et n désignent deux entiers naturels non simultanément nuls.

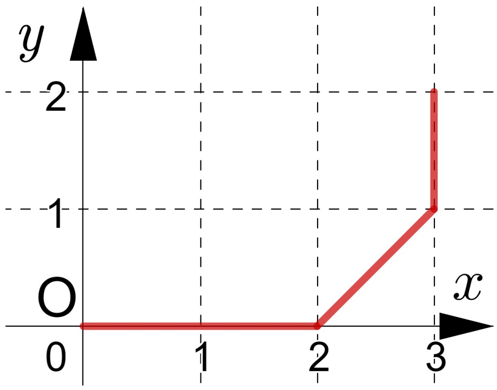
On appelle **chemin de Delannoy** la succession de segments horizontaux, verticaux ou diagonaux, respectivement associés aux vecteurs de translation de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, qui relient l'origine O du repère au point de coordonnées $(m; n)$.

On appelle le point de coordonnées $(m; n)$ le **point d'arrivée** du chemin de Delannoy.

Un chemin de Delannoy constitué de p segments, avec $p \geq 1$, est représenté par une liste ordonnée de p nombres $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ où $a_i \in \{0, 1, 2\}$ correspond à la i-ème translation effectuée :

- 0 correspond à une translation de vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- 1 correspond à une translation de vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- 2 correspond à une translation de vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Par exemple, dans le repère orthonormé ci-dessous, est tracé le chemin de Delannoy représenté par la liste $(0, 0, 1, 2)$. Le point d'arrivée est le point de coordonnées $(3; 2)$.



1. Quelles sont les coordonnées du point d'arrivée du chemin de Delannoy représenté par la liste $(1, 0, 2, 1)$?
2. Tracer sur la copie tous les chemins de Delannoy admettant le point de coordonnées $(2; 1)$ comme point d'arrivée. On fera autant de graphiques que de chemins.

On note $D\,(m, n)$ le nombre de chemins de Delannoy admettant le point de coordonnées $(m; n)$ comme point d'arrivée. Par convention, $D(0, 0) = 1$.

3. (a) Justifier que $D\,(m, 0) = 1$.
   (b) Est-il vrai que l'on a $D\,(m, n) = D\,(n, m)$? Justifier la réponse.
   (c) Calculer $D\,(1010, 1)$.

4. Algorithme de calcul
   (a) Justifier que $D(1,1) = 3$.
   (b) Soient m et n des entiers naturels non nuls. Justifier que l'on a la relation :

$$D(m,n) = D(m-1,n) + D(m-1,n-1) + D(m,n-1)$$

   (c) Recopier et compléter le tableau de valeurs de $D(m,n)$ suivant les valeurs de m et n ci-dessous :

m \ n	0	1	2	3	4
0	1	1			
1	1	3			
2					
3					
4					

Soit p un entier naturel non nul. À un chemin de Delannoy $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$, on associe le nombre entier naturel N donné par :

$$N = a_1 + a_2 \times 3 + a_3 \times 3^2 + ... + a_p \times 3^{p-1}$$

5. Dans cette question, on suppose $p \geqslant 2$. On exprimera les réponses demandées en fonction de a_1, a_2, …, a_p.
   (a) Quel est le reste dans la division euclidienne de N par 3 ?
   (b) On note q le quotient dans la division euclidienne de N par 3. Quel est le reste dans la division euclidienne de q par 3 ?
6. On donne le chemin de Delannoy représenté par la liste $(2, 0, 2, 1)$. Calculer le nombre associé N.
7. On admet qu'il existe un unique chemin de Delannoy auquel on associe le nombre $N = 2021$. Dans cette question, on s'intéresse à ce chemin.
   (a) Donner la liste qui représente ce chemin.
   (b) Quelles sont les coordonnées du point d'arrivée A de ce chemin ?
   (c) Combien de chemins de Delannoy ont pour point d'arrivée le point A ?

Exercice 2 : 2021 en équations

1. Déterminer les deux nombres entiers naturels u et v autres que 1 et 2021 tels que $u \times v = 2021$ et $u < v$.

2. Déterminer tous les nombres entiers positifs a tels que $a^2 + 2021$ soit le carré d'un entier positif.

3. Le but de cette question est de chercher, s'ils existent, des entiers naturels a tels que $a^3 + 2021$ soit le cube d'un entier positif. Cela revient à déterminer tous les couples d'entiers naturels $(a; b)$ tels que $a^3 + 2021 = b^3$.

   (a) Pour tous nombres entiers naturels a et b, démontrer que $b^3 - a^3 = (b-a)(b^2 + ab + a^2)$.

   (b) On pose $b - a = u$ et $b^2 + ab + a^2 = v$ où u et v sont les entiers trouvés à la question 1. Montrer que $3a^2 + 129a + 1802 = 0$.

   (c) On pose $b - a = 1$ et $b^2 + ab + a^2 = 2021$. Montrer que a vérifie une équation du second degré que l'on précisera.

   (d) Grâce aux relations obtenues aux questions 3(b) et 3(c), existe-t-il des entiers naturels a tels que $a^3 + 2021$ soit le cube d'un entier positif ?

4. Le but de cette question est de chercher les entiers naturels a tels que $a^4 + 2021$ soit la puissance quatrième d'un entier positif. En utilisant le résultat de la question 2, déterminer, s'ils existent, les entiers naturels a qui vérifient cette condition.