Exercice 1 : Ne pas déranger

Dans cet exercice, on appelle mot une succession de lettres n'ayant pas nécessairement de signification.

Une *anagramme* est un mot obtenu en modifiant l'ordre des lettres d'un autre mot.

Par exemple, les mots HALTES et SETLHA sont deux anagrammes du mot THALES.

Un *dérangement* est une anagramme d'un mot telle qu'aucune de ses lettres ne soit à la même position que dans le mot initial.

Par exemple, HALTES n'est pas un dérangement du mot THALES mais HTLASE est un dérangement du mot THALES.

Le but de l'exercice est de dénombrer des anagrammes et des dérangements à partir d'un mot donné.

Par exemple, à partir du mot LIE, on compte 6 anagrammes (LIE, LEI, ELI, EIL, IEL, ILE) et 2 dérangements (IEL et ELI).

Toute trace de recherche sera valorisée.

Partie 1

Dans cette partie, on forme des mots en utilisant les lettres du mot ABEL.

1. Combien de mots de 3 lettres, avec éventuellement des répétitions, peut-on former ?
   On peut former $4^3 = 64$ mots de trois lettres différents en utilisant les lettres du mot ABEL, avec éventuellement des répétitions.
2. Combien y a-t-il d'anagrammes du mot ABEL ?
   On peut former $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ anagrammes du mot ABEL.
   Liste des anagrammes : ABEL, BELA, ELAB, LABE, AELB, ALBE, BLAE, BAEL, EABL, EBLA, LBEA, LEAB, ABLE, BEAL, ELBA, LAEB, AEBL, ALEB, BLEA, BALE, EALB, EBAL, LBAE, LEBA.
3. Quel est le nombre de dérangements du mot ABEL ?
   Les dérangements du mot ABEL sont BELA, ELAB, LABE, BLAE, LEAB, ELBA, BALE, EALB, LEBA. Il y en a 9.

Partie 2

Dans cette partie, on forme des mots en utilisant les lettres du mot GAUSS.

1. Combien de mots de 4 lettres, avec éventuellement des répétitions, peut-on former ?
   On peut former $4^4 = 128$ mots de quatre lettres différents en utilisant les lettres du mot GAUSS, avec éventuellement des répétitions.
2. Combien y a-t-il d'anagrammes du mot GAUSS ?
   On peut former $\dfrac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2} = 60$ anagrammes du mot GAUSS.

   Liste des anagrammes : GAUSS, AUSSG, USSGA, SSGAU, SGAUS, GUSSA, GSSAU, GSAUS, ASSGU, ASGUS, AGUSS, USGAS, UGASS, UASSG, SAUSG, SUSGA, GASSU, GASUS, AUSGS, AUGSS, USASG, SSAUG, SSUGA, SGUSA, SGSAU, GUSAS, GUASS, GSUSA, ASUSG, AGSSU, AGSUS, UGSSA, UGSAS, UASGS, UAGSS, SASGU, SAGUS, SUGAS, SUASG, USSAG, SSGUA, SGASU, GSSUA, GSASU, ASSUG, ASGSU, USGSA, SAUGS, SUSAG, USAGS, SSAGU, SSUAG, SGUAS, SGSUA, GSUAS, ASUGS, SASUG, SAGSU, SUGSA, SUAGS.

3. Quel est le nombre de dérangements du mot GAUSS ?
   Les dérangements du mot GAUSS sont USSGA, SSGAU, ASSGU, SUSGA, SSAUG, SGSAU, USSAG, SSGUA, ASSUG, SUSAG, SSAGU, SGSUA. Il y en a 12.

Partie 3

1. Quel est le nombre de dérangements du mot PAPPUS ?
   Les dérangements du mot PAPPUS sont APUSPP, SPUAPP, UPSAPP, SPAUPP, UPASPP, APSUPP. Il y en a 6.
2. Quel est le nombre de dérangements du mot THALES ?
   On peut former $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 720$ anagrammes du mot THALES.
   Parmi ces anagrammes :
   - 1 a ses six lettres à la même position que le mot THALES.
   - 0 ont cinq de leurs lettres à la même position que dans le mot THALES.
   - $\dfrac{6 \times 5}{2 \times 1} \times 1 = 15$ ont quatre de leurs lettres à la même position que dans le mot THALES : HTALES, SHALET, TAHLES, TSALEH, AHTLES, LHATES, THLAES, THSLEA, TLAHES, THALSE, EHALTS, TEALHS, THAELS, THASEL, THELAS.
   - $\dfrac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} \times 2 = 40$ ont trois de leurs lettres à la même position que dans le mot THALES : ATHLES, EHALST, HATLES, STALEH, TLHAES, TEALSH, HSALET, LHTAES, THAESL, THASLE, TALHES, TSHLEA, AHLTES, EHATLS, THEALS, THELSA, TASLEH, TEAHLS, HLATES, AHSLET, LTAHES, SHTLEA, LHAETS, SHALTE, THLEAS, THSAEL, TLAEHS, TSALHE, HEALTS, ETALHS, LHASET, SHATEL, THLSEA, THSLAE, TAELHS, TLASEH, TEHLAS, TSAHEL, AHELTS, EHTLAS.
   - $\dfrac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{4 \times 3 \times 2 \times 1} \times 9 = 135$ ont deux de leurs lettres à la même position que dans le mot THALES.
   - $6 \times 44 = 264$ ont une de leurs lettres à la même position que dans le mot THALES.
     On en déduit qu'il y a $720 - 1 - 0 - 15 - 40 - 135 - 264 = 265$ dérangements du mot Thalès.

Correction de l'exercice académique n°2 VT équipe

La rumeur

Soit n un entier naturel non nul. Une rumeur circule entre n propagateurs de cette rumeur. Chaque propagateur ne connaît au départ qu'une partie de cette rumeur et aucun d'entre eux ne connaît la même partie qu'un autre propagateur. En rassemblant les n parties de la rumeur, on reconstitue la rumeur en entier.

Ces propagateurs s'appellent au téléphone entre eux et se disent, à cette occasion, tout ce qu'ils savent. Un appel n'est possible qu'entre deux propagateurs.

Afin de justifier les résultats, on pourra noter P_1, P_2, … P_n les propagateurs et, par exemple, $P_1 \leftrightarrow P_2$ un appel entre les propagateurs P_1 et P_2. A l'issue de cet appel, P_2 reçoit toute l'information de P_1 qui s'ajoute à sa propre information, et réciproquement pour P_1.

On prendra soin de préciser l'ordre dans lequel sont effectués les appels successifs entre deux propagateurs.

1) Déterminer le nombre minimum d'appels nécessaires afin que les n propagateurs connaissent entièrement la rumeur lorsque :
   a. $n = 2$:
      Il est évident que le nombre minimum d'appels entre 2 personnes est de 1.

   b. $n = 3$:
      Il est évident qu'il faut au moins 3 appels. Démontrons que 3 appels suffisent.
      1er appel : $P_1 \leftrightarrow P_2$
      2ème appel : $P_2 \leftrightarrow P_3$. Les propagateurs P_2 et P_3 connaissent alors toute la rumeur
      3ème appel : $P_3 \leftrightarrow P_1$ ou $P_2 \leftrightarrow P_1$, ainsi le propagateur P_1 connaît toute la rumeur.

2) Justifier que 4 appels suffisent entre 4 propagateurs pour que chacun connaisse entièrement la rumeur.

   Premiers appels : $P_1 \leftrightarrow P_2$ et $P_3 \leftrightarrow P_4$.
   Puis : $P_2 \leftrightarrow P_3$ et $P_1 \leftrightarrow P_4$.
   Donc 4 appels suffisent entre 4 propagateurs pour que chacun connaisse entièrement la rumeur.

3) Trouver une répartition des appels permettant de prouver que 8 appels suffisent entre 6 propagateurs pour que chacun connaisse entièrement la rumeur.

   Premiers appels : $P_1 \leftrightarrow P_2$ et $P_4 \leftrightarrow P_5$. Ainsi, P_1 et P_2 connaissent les parties 1 et 2, P_4 et P_5 les parties 4 et 5
   Puis : $P_2 \leftrightarrow P_3$ et $P_5 \leftrightarrow P_6$. Ainsi, P_2 et P_3 connaissent les parties 1, 2 et 3, P_6 et P_5 les parties 4, 5 et 6.
   Puis : $P_2 \leftrightarrow P_5$et $P_3 \leftrightarrow P_6$. Ainsi, P_2, P_3, P_5 et P_6 connaissent tout.
   Enfin, par exemple, P_2 dit tout à P_1 et P_3 à P_4.

4) Soit $n > 4$. En imaginant qu'un propagateur appelle $n - 4$ autres propagateurs, démontrer que $2n - 4$ appels suffisent pour que les n propagateurs connaissent toute la rumeur. On pourra se servir du résultat de la question 2).

1 propagateur P appelle $n - 4$ autres propagateurs, cela fait $n - 4$ appels et ce propagateur P connaît alors $n - 3$ « parties » de la rumeur.
D'après le résultat de la question 2), 4 appels suffisent ensuite entre P et les 3 derniers propagateurs pour que ces 4 propagateurs connaissent tout ce que sait P et ce que savent les 3 derniers propagateurs, c'est-à-dire toute la rumeur !
Ensuite, P appelle chacune des $n - 4$ propagateurs du départ pour leur communiquer toute la rumeur.
Au total, il y a eu $n - 4 + 4 + n - 4 = 2n - 4$ appels. Donc $2n - 4$ appels suffisent pour que chacun des n propagateurs connaissent entièrement la rumeur.

5) a. Soit i un entier naturel non nul, $i \leq n$. Combien faut-il au minimum d'appels pour qu'un propagateur connaisse i nouvelles parties de la rumeur ? Combien de parties connaît alors ce propagateur ?

Il faut au moins i appels pour que chacun des i propagateurs connaissant les i nouvelles parties de la rumeur propage la partie qu'il connaît.
Le propagateur connaitra alors $i + 1$ parties de la rumeur (les i nouvelles parties ajoutées à la sienne).

b. On suppose dans cette question qu'un des propagateurs n'effectue qu'un seul appel pour apprendre entièrement la rumeur. Prouver alors que le nombre d'appels nécessaires entre les n propagateurs est supérieur ou égal à $2n - 3$.

Supposons qu'un des propagateurs P connaisse toute la rumeur qu'en un appel. Il est alors nécessaire qu'il y ait eu auparavant au moins $n - 1$ appels (pour avoir les $n - 1$ autres parties de la rumeur). Au dernier appel, P et son interlocuteur connaissent tous les deux entièrement la rumeur.
Il faut ensuite que les $n - 2$ autres propagateurs connaissent entièrement la rumeur, donc il faut au moins $n - 2$ appels. On en déduit qu'il y a eu alors au moins $n - 1 + n - 2 = 2n - 3$ appels.

c. En déduire que lorsque tous les propagateurs connaissent la rumeur en un nombre minimum d'appels, chacun a au moins deux conversations.

Dans la question 4), on a prouvé que $2n - 4$ appels suffisent entre les n propagateurs
et $2n - 4 < 2n - 3$. Si un des propagateurs ne connaît la rumeur qu'en un appel, il y a donc une contradiction. On en déduit que chacun des propagateurs effectue au moins deux appels.