MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE LA JEUNESSE ET DES SPORTS
Liberté Égalité Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques 2021

Voie technologique

ACADÉMIE DE NICE
Liberté Égalité Fraternité

Académie de Nice

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie («exercices nationaux»). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie («exercices académiques»). Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercices académiques

Résolution en équipe

Les candidats traitent **les deux exercices**.

Exercice 1 : Ne pas déranger

Dans cet exercice, on appelle mot une succession de lettres n'ayant pas nécessairement de signification.

Une *anagramme* est un mot obtenu en modifiant l'ordre des lettres d'un autre mot.

Par exemple, les mots HALTES et SETLHA sont deux anagrammes du mot THALES.

Un *dérangement* est une anagramme d'un mot telle qu'aucune de ses lettres ne soit à la même position que dans le mot initial.

Par exemple, HALTES n'est pas un dérangement du mot THALES mais HTLASE est un dérangement du mot THALES.

Le but de l'exercice est de dénombrer des anagrammes et des dérangements à partir d'un mot donné.

Par exemple, à partir du mot LIE, on compte 6 anagrammes (LIE, LEI, ELI, EIL, IEL, ILE) et 2 dérangements (IEL et ELI).

Toute trace de recherche sera valorisée.

Partie 1

Dans cette partie, on forme des mots en utilisant les lettres du mot ABEL.

1. Combien de mots de 3 lettres, avec éventuellement des répétitions, peut-on former ?
2. Combien y a-t-il d'anagrammes du mot ABEL ?
3. Quel est le nombre de dérangements du mot ABEL ?

Partie 2

Dans cette partie, on forme des mots en utilisant les lettres du mot GAUSS.

1. Combien de mots de 4 lettres, avec éventuellement des répétitions, peut-on former ?
2. Combien y a-t-il d'anagrammes du mot GAUSS ?
3. Quel est le nombre de dérangements du mot GAUSS ?

Partie 3

1. Quel est le nombre de dérangements du mot PAPPUS ?
2. Quel est le nombre de dérangements du mot THALES ?

Exercice 2 : La rumeur

Soit n un entier naturel non nul. Une rumeur circule entre n propagateurs de cette rumeur. Chaque propagateur ne connaît au départ qu'une partie de cette rumeur et aucun d'entre eux ne connaît la même partie qu'un autre propagateur. En rassemblant les n parties de la rumeur, on reconstitue la rumeur en entier.

Ces propagateurs s'appellent au téléphone entre eux et se disent, à cette occasion, **tout ce qu'ils savent**. Un appel n'est possible qu'entre **deux** propagateurs.

Afin de justifier les résultats, on pourra noter P_1, P_2, ..., P_n les propagateurs et, par exemple, $P_1 \leftrightarrow P_2$ un appel entre les propagateurs P_1 et P_2. À l'issue de cet appel, P_2 reçoit toute l'information connue de P_1 qui s'ajoute à sa propre information, et réciproquement pour P_1.

On prendra soin de préciser l'ordre dans lequel sont effectués les appels successifs entre deux propagateurs.

1. Déterminer le nombre minimum d'appels nécessaires afin que les n propagateurs connaissent entièrement la rumeur lorsque :
   (a) $n = 2$
   (b) $n = 3$
2. Justifier que 4 appels suffisent entre 4 propagateurs pour que chacun connaisse entièrement la rumeur.
3. Trouver une répartition des appels permettant de prouver que 8 appels suffisent entre 6 propagateurs pour que chacun connaisse entièrement la rumeur.
4. Soit $n > 4$. En imaginant qu'un des propagateurs appelle $n - 4$ autres propagateurs, démontrer que $2n - 4$ appels suffisent pour que les n propagateurs connaissent toute la rumeur. On pourra se servir du résultat de la question 2.
5. (a) Soit i un entier naturel non nul tel que $i \leqslant n$. Combien faut-il d'appels au minimum pour qu'un propagateur connaisse i nouvelles parties de la rumeur ? Combien de parties connaît alors ce propagateur ?
   (b) On suppose dans cette question qu'un des propagateurs n'effectue qu'un seul appel pour apprendre entièrement la rumeur. Prouver alors que le nombre d'appels nécessaires entre les n propagateurs est supérieur ou égal à $2n - 3$.
   (c) En déduire que lorsque tous les propagateurs connaissent la rumeur en un nombre minimum d'appels, chacun a au moins deux conversations.