Olympiades : b.a.-ba

Correction

1)

$$M_1 = bab$$
$$M_2 = bababbab$$
$$M_3 = bababbababbabbababbab$$

2)

a) $M_1 = \color{red}{bab}ab\color{red}{bab}ab$ d'où $M_0 = baba$.

b) Non ce n'est pas possible en considérant les deux premiers caractères de M_1. En effet ces deux caractères sont définis à partir du premier caractère de M_0 :

- Soit le premier caractère de M_0 est a dans ce cas les deux premiers caractères de M_1 sont ab.
- Soit le premier caractère de M_0 est b, dans ce cas les premiers caractères de M_1 sont ba.

Les deux premiers caractères de M_1 ne peuvent pas être bb.

3)

a) $\begin{cases} a_0 = 0 \\ b_0 = 1, \\ \ell_0 = 1 \end{cases} \begin{cases} a_1 = 1 \\ b_1 = 2, \\ \ell_1 = 3 \end{cases} \begin{cases} a_2 = 3 \\ b_2 = 5, \\ \ell_2 = 8 \end{cases} \begin{cases} a_3 = 8 \\ b_3 = 13 \\ \ell_3 = 21 \end{cases}$

b) Dans M_n n'importe quelle lettre, que ce soit a ou b engendre un a pour M_{n+1}, le nombre de a dans M_{n+1} est donc égal au nombre de lettres dans M_n d'où $a_{n+1} = \ell_n = a_n + b_n$.

c) $b_{n+1} = a_n + 2b_n$

4)

a) Si $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$ alors on doit obtenir, d'après la question 2, $a_3 = 5$ et $b_3 = 8$, ce qui n'est pas la réponse obtenue à partir de `calcul(1, 0, 3)`.

b)

```
def calcul(a0, b0, n):
    a = a0
    b = b0
    for k in range(n):
        c = a
        a = c + b
        b = c + 2 * b
    return a, b
```

5) (Remarque : le mot initial est $M_0 = ab$)

D'après les questions 3.a et 3.b, on a :

$$\begin{cases} a_{10} = a_9 + b_9 \\ b_{10} = a_9 + 2b_9 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_{10} = \ell_9 \\ \ell_{10} = 2\ell_9 + b_9 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_{10} = 10946 \\ b_9 = 6765 \end{cases}$$

On en déduit alors :

$$b_{10} = \ell_{10} - a_{10} = 17711$$
$$a_9 = \ell_9 - b_9 = 4181$$

Le mot M_9 est constitué de 4 181 lettres a et 6 765 lettres b.

Le mot M_{10} est constitué de 10 946 lettres a et 17 711 lettres b.

6) On a vu précédemment que pour tout entier naturel n, on a : $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + b_n \\ b_{n+1} = a_n + 2b_n \\ \ell_n = a_n + b_n \end{cases}$

D'une part :

$$\ell_{n+2} = a_{n+2} + b_{n+2} = (a_{n+1} + b_{n+1}) + (a_{n+1} + 2b_{n+1})$$
$$\ell_{n+2} = 2a_{n+1} + 3b_{n+1} = 2(a_n + b_n) + 3(a_n + 2b_n)$$
$$\ell_{n+2} = 5a_n + 8b_n$$

D'autre part :

$$3\ell_{n+1} - \ell_n = 3(a_{n+1} + b_{n+1}) - (a_n + b_n)$$
$$3\ell_{n+1} - \ell_n = 3(a_n + b_n + a_n + 2b_n) - (a_n + b_n)$$
$$3\ell_{n+1} - \ell_n = 5a_n + 8b_n$$

Ainsi $\begin{cases} \ell_{n+2} = 5a_n + 8b_n \\ 3\ell_{n+1} - \ell_n = 5a_n + 8b_n \end{cases} \Longrightarrow \ell_{n+2} = 3\ell_{n+1} - \ell_n$.

7)

a) Soient λ et μ des nombres réels. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \lambda x_1^n + \mu x_2^n$. Pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+2} = \lambda x_1^{n+2} + \mu x_2^{n+2} = \lambda x_1^n x_1^2 + \mu x_2^n x_2^2$$
$$u_{n+2} = \lambda x_1^n(3x_1 - 1) + \mu x_2^n(3x_2 - 1)$$
$$u_{n+2} = 3(\lambda x_1^{n+1} + \mu x_2^{n+1}) - (\lambda x_1^n + \mu x_2^n)$$
$$u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$$

b) L'énoncé nous incite à chercher ℓ_n sous la forme $\lambda x_1^n + \mu x_2^n$ où λ et μ sont des nombres réels à déterminer et x_1 et x_2 sont des solutions distinctes de $x^2 = 3x - 1$ c'est-à-dire $x^2 - 3x + 1 = 0$.

$$\Delta = 5$$

On peut poser alors $x_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Comme $M_0 = baba$ et $M_1 = bababbabab$, on a $\begin{cases} \ell_0 = 4 \\ \ell_1 = 10 \end{cases}$ ce qui va nous permettre de déterminer λ et μ :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 4 \\ \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\lambda + \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\mu = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{10-4\sqrt{5}}{2} \\ \mu = \dfrac{10+4\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

On obtient finalement :

$$\ell_n = \frac{10-4\sqrt{5}}{5} \times \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{10+4\sqrt{5}}{5} \times \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Quelques fonctions Python utilisées lors de la conception du sujet

```
def mot(M0, n): # retourne le mot M(n)
    M = M0
    for k in range(n):
        N = ""
        for x in M:
            if x == "a":
                N = N + "ab"
            elif x == "b":
                N = N + "bab"
        M = N
    return M

def motanterieur(M): # Connaissant M(n+1), retourne M(n), vérifie aussi si M(n+1)
est valide
    n = len(M)
    N = ""
    i = 0
    while i < n:
        if M[i] == "a":
            N = N + "a"
            i = i + 2
        elif M[i] == "b":
            N = N + "b"
            i = i + 3
        else:
            return "mot non valide"
    if mot(N,1) == M :
        return N
    else:
        return "mot non valide"
```

Exemples d’interaction :

```
>>> mot("b",3)
'bababbababbabbababbab'
>>> motanterieur("bababbabab")
'baba'
>>> motanterieur("bbaa")
'mot non valide'
```

Corrigé : Exercice 2 -Teneur en or -Voie Générale Individuel

1) $x^2=x+1 \Leftrightarrow x^2-x-1=0$. On calcule $\Delta=(-1)^2-4(-1)=5>0$

donc deux solutions $x_1=\frac{1-\sqrt{5}}{2}<0$ et $x_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}>0$ .On a alors $\Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}>1$.

2)

(a) Comme $AB=l$,l'autre côté a nécessairement comme longueur ϕl ou bien $\frac{l}{\phi}$.
Comme $\phi>1$, $\phi l>l$,la seule possibilité pour que le rectangle soit effectivement inclus dans le carré est que l'autre côté du rectangle ait pour longueur $\frac{l}{\phi}$.
Il n'existe donc qu'un seul rectangle R_1 de ce type de côtés de longueurs l et $\frac{l}{\phi}$.

(b) Ainsi, $T_1=\frac{Aire(R_1)}{Aire(ABCD)}=\frac{l\times\frac{l}{\phi}}{l^2}=\frac{1}{\phi}$ et $T\geq T_1$.

3)

(a) On a $0\leq EF\leq l$ et $EF=\phi EH$. Comme $\phi>0$ alors $0\leq\frac{EF}{\phi}\leq\frac{l}{\phi}$.
Ainsi, $0\leq EH\leq\frac{l}{\phi}$

(b) Pour que le rectangle $EFGH$ soit un rectangle d'or, il faut que $EF=\phi x$ où $x=EH$.

L'aire de chacun de ces rectangles vaut donc $A(x)=\phi x^2$,fonction définie sur l'intervalle [0; $\frac{l}{\phi}$].
La fonction carrée étant croissante sur [0; $+\infty$ [et $\phi>0$,le maximum est atteint pour $x=\frac{l}{\phi}$. Le rectangle recherché a donc pour longueur l et pour largeur $\frac{l}{\phi}$.

(c) On a alors $Aire(R_2)=\phi(\frac{l}{\phi})^2=\frac{l^2}{\phi}$.

(d) $T_2=\frac{Aire(R_2)}{Aire(ABCD)}=\frac{\frac{l^2}{\phi}}{l^2}=\frac{1}{\phi}$.

(e) On peut en conclure que $T_1=T_2$ et que la teneur en or du carré $ABCD$ est $T>\frac{1}{\phi}$.

4) (a) i. $EG^2=(x_G-x_E)^2+(y_G-y_E)^2=((l-x)-x)^2+(l-0)^2=(l-2x)^2+l^2$.

ii. $EFGH$ est un rectangle. On se place dans le triangle EGH rectangle en H .

D'après le théorème de Pythagore, on a : $EG^2=EH^2+HG^2$.

$EH^2=(x_H-x_E)^2+(y_H-y_E)^2=(0-x)^2+(y-0)^2=x^2+y^2$.
$HG^2=(x_H-x_G)^2+(y_H-y_G)^2=(0-(l-x))^2+(y-l)^2=(l-x)^2+(l-y)^2$.

Ainsi, $EG^2=x^2+y^2+(l-x)^2+(l-y)^2$.

(b) D'après (a), on peut écrire,
$(l-2x)^2+l^2=x^2+y^2+(l-x)^2+(l-y)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2l^2-4lx+4x^2=2l^2-2xl-2yl+2x^2+2y^2$

$\Leftrightarrow \quad -2lx+2x^2+2yl-2y^2=0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-y^2-l(x-y)=0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-y)(x+y-l)=0$

c) Les questions précédentes permettent d'écrire que $EFGH$ rectangle d'or inscrit dans $ABCD$ $\Leftrightarrow$ $(x-y)(x+y-l)=0$

Si $x+y=l$ alors $EFGH$ est un carré (en effet, $EH^2=x^2+y^2$ et $HG^2=(x+y-x)^2+(x+y-y)^2=x^2+y^2$) et n'est donc pas un rectangle d'or.

Intéressons-nous au cas où $y=x$.
Dans ce cas, les côtés du rectangle $EFGH$ sont parallèles aux diagonales du carré.

On a alors : $A(x)=Aire(EFGH)=\sqrt{2}x\times\sqrt{2}(l-x)=2x(l-x)$ avec $x\in[0;l]$.

Mais pour que $EFGH$ soit un rectangle d'or, il faut :

$$l-x=\phi x \qquad \text{ou} \qquad x=\phi(l-x)$$

$$x=\frac{l}{\phi+1} \qquad \text{ou} \qquad x=\frac{l\phi}{\phi+1}$$

$$\begin{aligned} Aire(R_3)&=2\left(\frac{l}{\phi+1}\right)\left(l-\frac{l}{\phi+1}\right)\\ &=2\left(\frac{l}{\phi+1}\right)\left(\frac{l\phi}{\phi+1}\right)\\ &=2\frac{l^2\phi}{(\phi+1)^2}\end{aligned} \qquad \text{ou} \qquad \begin{aligned} Aire(R_3)&=2\left(\frac{\phi l}{\phi+1}\right)\left(l-\frac{\phi l}{\phi+1}\right)\\ &=2\left(\frac{l\phi}{\phi+1}\right)\left(\frac{l}{\phi+1}\right)\\ &=2\frac{l^2\phi}{(\phi+1)^2}\end{aligned}$$

Donc, dans les deux cas, $T=\dfrac{Aire(R_3)}{Aire(ABCD)}=\dfrac{2\phi}{(\phi+1)^2}=\dfrac{2\phi}{(\phi^2)^2}=\dfrac{2}{\phi^3}$ ($\phi^2=\phi+1$)

(d) Calculons $\dfrac{1}{\phi}-\dfrac{2}{\phi^3}=\dfrac{\phi^2-2}{\phi^3}$ donc du signe de ϕ^2-2 car $\phi>0$.

$\phi^2=\phi+1$ donc $\phi^2-2=\phi+1-2=\phi-1>0$ car $\phi>1$.

e) Ainsi $T\geq T_1>T_3$ et on peut conclure que la teneur en or d'un carré est d'au moins $\dfrac{1}{\phi}$.