MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE LA JEUNESSE ET DES SPORTS
Liberté Égalité Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques 2021

Voie générale

ACADÉMIE DE NICE
Liberté Égalité Fraternité

Académie de Nice

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie («exercices nationaux»). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie («exercices académiques»). Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercices académiques

Résolution individuelle

Les candidats traitent **les deux exercices**.

Exercice 1 : b.a.-ba

Dans cet exercice, on définit la suite de mots (M_n) constitués uniquement des lettres a et b par :

- Un premier terme M_0.
- Et pour tout entier naturel n, le mot M_{n+1} se construit à partir du mot M_n en remplaçant tous les a par ab et tous les b par bab.

Par exemple, si $M_0 = a$, on obtient alors $M_1 = ab$, $M_2 = abbab$, $M_3 = abbabbababbab$ et ainsi de suite. L'objectif de cet exercice est d'étudier le nombre de lettres a et b qui constituent le mot M_n.

1. Dans cette question, on suppose $M_0 = b$. Déterminer les mots M_1, M_2 et M_3.
2. (a) On se donne $M_1 = bababbabab$. Déterminer alors M_0.
   (b) Est-il possible d'avoir $M_1 = bbaa$? Justifier la réponse.
3. Pour tout entier naturel n, on note :
   - a_n le nombre de a dans le mot M_n ;
   - b_n le nombre de b dans le mot M_n ;
   - ℓ_n le nombre de lettres dans le mot M_n.

   Par exemple, si $M_0 = a$, on obtient alors : $\begin{cases} a_0 = 1 \\ b_0 = 0 \\ \ell_0 = 1 \end{cases}$, $\begin{cases} a_1 = 1 \\ b_1 = 1 \\ \ell_1 = 2 \end{cases}$, $\begin{cases} a_2 = 2 \\ b_2 = 3 \\ \ell_2 = 5 \end{cases}$, $\begin{cases} a_3 = 5 \\ b_3 = 8 \\ \ell_3 = 13 \end{cases}$ etc.
   (a) Dans le cas où $M_0 = b$, déterminer toutes les valeurs de a_n, b_n et ℓ_n pour n entier naturel allant de 0 à 3.
   (b) On remarque que, pour tout entier naturel n, on a $a_{n+1} = a_n + b_n$. Justifier cette relation.
   (c) Pour tout entier naturel n, exprimer b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
4. On souhaite écrire une fonction « `calcul` », écrite en langage Python, prenant comme arguments les nombres entiers naturels a_0, b_0 et n, et devant retourner les valeurs de a_n et b_n.
   Maxime propose la fonction ci-contre.
   On rappelle que l'instruction `range(n)`, pour n entier naturel supérieur ou égal à 1, correspond à la liste des entiers naturels compris entre 0 et `n-1` inclus.

```
def calcul(a0, b0, n):
    a = a0
    b = b0
    for k in range(n):
        a = a + b
        b = a + 2 * b
    return a, b
```

   Voici un exemple d'utilisation de la fonction proposée par Maxime :

```
>>> calcul(1, 0, 3)
(6, 14)
```

   (a) Est-ce que la fonction proposée par Maxime renvoie les valeurs attendues dans le cas où $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et $n = 3$? Justifier la réponse.
   (b) Proposer une version corrigée de cette fonction afin qu'elle retourne les valeurs attendues de a_n et b_n.
5. Sachant que le mot M_9 est composé de 10 946 lettres et que le mot M_{10} est composé de 28 657 lettres, déterminer pour chacun des mots M_9 et M_{10}, le nombre de lettres a et le nombre de lettres b dont ils sont constitués.
6. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a la relation :

$$\ell_{n+2} = 3\ell_{n+1} - \ell_n$$

7. (a) Soient λ et μ des nombres réels.
Soient x_1 et x_2 des nombres réels distincts tels que ${x_1}^2 = 3x_1 - 1$ et ${x_2}^2 = 3x_2 - 1$.
On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \lambda {x_1}^n + \mu {x_2}^n$.
Démontrer alors que, pour tout entier naturel n, la suite (u_n) vérifie l'égalité :

$$u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n \qquad (*)$$

On admet réciproquement que si une suite (u_n) vérifie la relation (*) alors elle pourra s'écrire sous la forme $u_n = \lambda {x_1}^n + \mu {x_2}^n$.

(b) On suppose dans cette question que $M_0 = baba$. Déterminer, pour tout entier naturel n, une expression de ℓ_n en fonction de n.

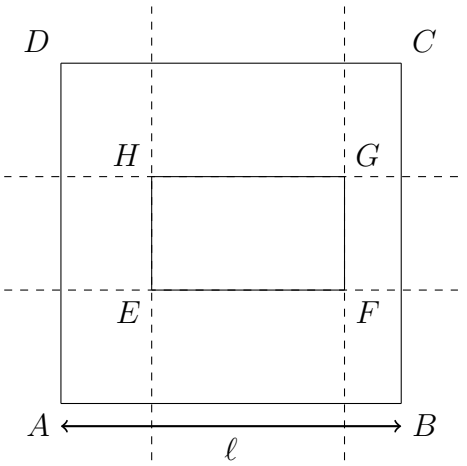
Exercice 2 : Teneur en or d'un carré

Préambule :

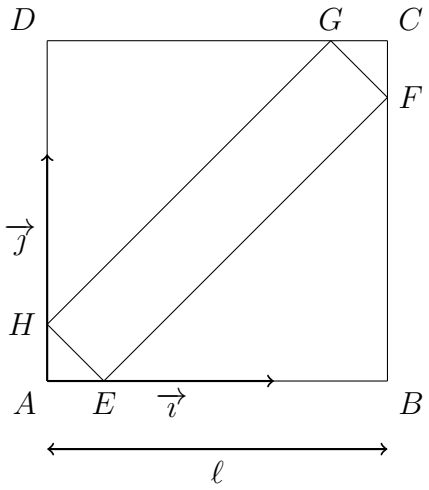
- On appelle **nombre d'or**, noté Φ, la solution positive de l'équation $x^2 = x + 1$.
- On appelle **rectangle d'or** tout rectangle dont la largeur vaut a et la longueur $a \times \Phi$, où $a \in \mathbb{R}$ et $a > 0$.
- On admet le résultat suivant :
On se place dans un carré $ABCD$ de côté de longueur $\ell > 0$. Parmi tous les rectangles d'or inclus dans le carré $ABCD$, il en existe un dont l'aire est plus grande que celle de tous les autres. Ce rectangle est noté $\mathcal{R}$ et on définit la **teneur en or** T du carré $ABCD$ par le rapport suivant :

$$T = \frac{\text{Aire}(\mathcal{R})}{\text{Aire}(ABCD)}$$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 = x + 1$ et montrer que $\Phi > 1$.
2. On s'intéresse tout d'abord aux rectangles dont un côté est le côté $[AB]$.
   (a) Montrer qu'il n'existe qu'un seul rectangle d'or $\mathcal{R}_1$ de ce type.
   (b) Calculer alors le rapport $\dfrac{\text{Aire}(\mathcal{R}_1)}{\text{Aire}(ABCD)}$. Le comparer à T.
3. Dans cette question, on s'intéresse aux rectangles $EFGH$ inclus dans le carré $ABCD$ dont les côtés sont parallèles aux côtés du carré (voir la figure ci-contre). On admet qu'il suffit de s'intéresser aux rectangles tels que $EF \geqslant EH$.
   (a) Montrer que $0 \leqslant EH \leqslant \dfrac{\ell}{\Phi}$.
   (b) Déterminer les dimensions du rectangle d'or $\mathcal{R}_2$ d'aire maximale de ce type.
   (c) En déduire que $\text{Aire}(\mathcal{R}_2) = \dfrac{\ell^2}{\Phi}$.
   (d) Calculer le rapport $\dfrac{\text{Aire}(\mathcal{R}_2)}{\text{Aire}(ABCD)}$.
   (e) Que peut-on en conclure sur la teneur en or T du carré $ABCD$?



4. Dans cette question, on s'intéresse aux rectangles $EFGH$ inclus dans le carré $ABCD$ tels que $E \in [AB]$, $F \in [BC]$, $G \in [CD]$ et $H \in [AD]$.
On se place dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ ci-dessous.
On note x l'abscisse du point E et y l'ordonnée du point H.



On admet que les coordonnées du point G sont $G(\ell - x; \ell)$.

(a) On souhaite calculer EG^2 de deux manières différentes.

i. En utilisant l'expression de la distance entre les points E et G dans un repère orthonormé, montrer que $EG^2 = (\ell - 2x)^2 + \ell^2$.

ii. En utilisant le théorème de Pythagore, montrer que $EG^2 = (\ell - x)^2 + (\ell - y)^2 + x^2 + y^2$.

(b) En déduire que $(y - x)(x + y - \ell) = 0$.

(c) Dans cette question, on suppose que le rectangle $EFGH$ est un rectangle d'or, noté $\mathcal{R}_3$. Montrer que :

$$\frac{\text{Aire}(\mathcal{R}_3)}{\text{Aire}(ABCD)} = \frac{2\Phi}{(\Phi + 1)^2} = \frac{2}{\Phi^3}$$

(d) Comparer $\dfrac{1}{\Phi}$ et $\dfrac{2}{\Phi^3}$. Conclure.