Olympiades : les nombres multi-puissances

Correction

Partie A : premiers exemples

1) On a $64 = 2^6 = 4^3$ donc 64 est un nombre multi-puissances.
2)
Il suffit de remarquer $a^4 = (a^2)^2 = b^2$ où $b = a^2$.
Remarque : ainsi il existe une infinité de nombres multi-puissances.
3)
$2^4 = 16$ et $3^4 = 81$ sont des nombres multi-puissances.

Partie B : une condition nécessaire

1)

$$D(9) = \{1, 3, 9\}$$

Il n'y a qu'un seul diviseur positif de 9 autre que 1 et 9, 9 n'est donc pas un nombre multi-puissances, il n'y a qu'une seule manière de l'écrire sous la forme d'une puissance non triviale.
2)

$$D(7) = \{1, 7\}$$

Il n'existe pas de diviseur positif de 7 autre que 1 et 7, 7 ne peut pas s'écrire sous la forme d'une puissance non triviale, 7 n'est pas un nombre multi-puissances.
3)
Soit p un nombre premier. On a $D(p) = \{1, p\}$.
Tout comme la question précédente (7 est un nombre premier …), il n'existe pas de diviseur de p autre que 1 et p, un nombre premier p ne peut donc pas être un nombre multi-puissances.
4)

$$D(6) = \{1, 2, 3, 6\}$$

S'il existe une manière d'écrire 6 sous la forme d'une puissance non triviale a^n, on a nécessairement $a \in \{2, 3\}$.
6 n'est ni une puissance de 2 ni une puissance de 3.
Ainsi 6 n'est pas un nombre multi-puissances, il n'admet même pas une écriture sous forme de puissance non triviale.
Donc $x = 6$ admet deux diviseurs positifs autres que 1 et x et n'est pas un nombre multi-puissances.

La condition énoncée est nécessaire mais pas suffisante …

Partie C : forme irréductible

1)

a) $64 = 8^2 = 4^3 = 2^6$

b) $8 = 2^3$ donc 8^2 n'est pas une puissance irréductible.
$4 = 2^2$ donc 4^3 n'est pas une puissance irréductible.
On en déduit que 2^6 est la puissance irréductible de 64.

2)
Comme a^n est une puissance non triviale, on a $n \geq 2$.
De plus n n'est pas un nombre premier. Or 2 et 3 sont des nombres premiers. On a donc $n \geq 4$.

3)

$16 = 4^2 = 2^4$ est un nombre multi-puissances.

Soit x un nombre multi-puissances dont on note a^n la forme irréductible.

Comme $n \geq 4$, on a $a^n \geq a^4$

Or la fonction carrée est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ d'où

$$a \geq 2 \Longrightarrow a^2 \geq 4 \Longrightarrow (a^2)^2 \geq 4^2 \Longrightarrow a^4 \geq 16$$

Ainsi on a $\begin{cases} x \geq a^4 \\ a^4 \geq 16 \end{cases} \Longrightarrow x \geq 16.$

Il n'existe donc pas de nombres multi-puissances strictement inférieurs à 16.

<u>Alternative de résolution</u> : démontrer que tous les nombres 2, 3, 4, …, 15 ne sont pas des nombres multi-puissances…

Exercice 2 : 2 roues et une boîte

Dans cet exercice, toutes les longueurs sont exprimées en centimètres.
Le but de l'exercice est de remplir une boîte en y plaçant deux roues de rayons respectifs r et R et de centres respectifs A et B. On suppose dans tout l'exercice que $r \leqslant R$.
Il faut que ces roues remplissent entièrement la boîte afin d'éviter les mouvements lors du transport. On ne tient pas compte de l'épaisseur des roues.
On note L la largeur de la boîte.
On note C le point d'intersection de la roue de rayon R avec le fond de la boîte et O le point de la demi-droite $[BC)$ tel que le triangle ABO soit rectangle en O.

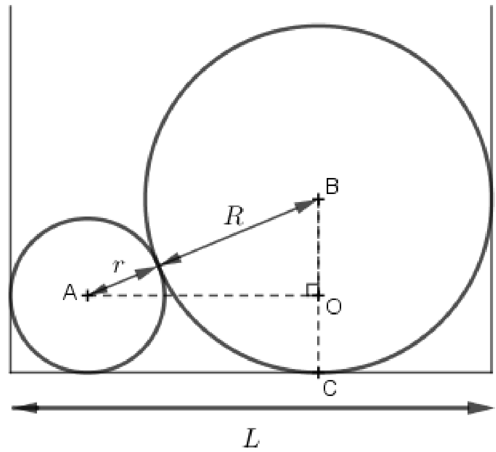

Schéma illustrant la situation

1. Dans cette question, les deux roues ont pour rayons respectifs $r = 4$ cm et $R = 9$ cm.
   (a) Justifier que OB = 5 cm.
   $OB = BC - OC = R - r = 9\text{cm} - 4\text{cm} = 5\text{cm}$
   (b) Calculer la longueur AO.
   Le triangle ABO est rectangle en O. D'après le théorème de Pythagore :
   $AB^2 = AO^2 + OB^2$
   $13^2 = AO^2 + 5^2$
   $AO^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$
   AO étant une longueur, on en déduit que $AO = \sqrt{144} = 12\text{cm}$.
   (c) En déduire la largeur L de la boîte.
   $L = r + AO + R = 4\text{cm} + 12\text{cm} + 9\text{cm} = 25\text{cm}$
2. Deux roues de rayons respectifs 3 cm et 10 cm remplissent-elles entièrement une boîte de largeur 25 cm ? Justifier.
   Si $r = 3$ cm et $R = 10$ cm :
   - $OB = BC - OC = R - r = 10\text{cm} - 3\text{cm} = 7\text{cm}$
   - $AO = \sqrt{13^2 - 7^2} = \sqrt{120} = 2\sqrt{30}\text{cm}$
   - $L = r + AO + R = 3\text{cm} + 2\sqrt{30}\text{cm} + 10\text{cm} \simeq 23,95\text{cm}$

   Par conséquent, deux roues de rayons respectifs 3 cm et 10 cm ne remplissent pas entièrement une boîte de largeur 25 cm.

Dans la suite de l'exercice, on se place dans le cas général où les deux roues ont pour rayons respectifs r et R.

3. Démontrer que $L = r + 2\sqrt{rR} + R$.
   L'utilisation du théorème de Pythagore dans le triangle ABO rectangle en O permet d'écrire $OA^2 = AB^2 - BO^2 = (r + R)^2 - (R - r)^2 = r^2 + 2rR + R^2 - R^2 + 2rR - r^2 = 4rR$ d'où $OA = 2\sqrt{rR}$. Finalement, on en déduit :
   $$L = r + AO + R = r + 2\sqrt{rR} + R$$
4. Dans cette question, on suppose qu'il existe deux entiers naturels non nuls a et b tels que $r = a^2$ et $R = b^2$.

(a) Démontrer que $L = (a+b)^2$.

$$L = r + 2\sqrt{rR} + R = a^2 + 2\sqrt{a^2b^2} + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$

(b) Dans cette question, on suppose que $L = 25$ cm.

i. Déterminer tous les couples $(a; b)$ vérifiant $L = (a+b)^2$.
Comme $25 = 5^2$, on en déduit que nécessairement $a + b = 5$. Comme a et b sont deux nombres entiers naturels non nuls avec $a < b$, les deux couples possibles sont $(1; 4)$ et $(2; 3)$.

ii. En déduire tous les rayons possibles des roues qui remplissent entièrement la boîte.

- Si $a = 1$ et $b = 4$ alors $r = 1$ cm et $R = 16$ cm. Dans ce cas, la grande roue a un diamètre de 32 cm et elle ne peut pas être contenue dans la boîte de largeur 25 cm.
- Si $a = 2$ et $b = 3$ alors $r = 4$ cm et $R = 9$ cm. Dans ce cas, on se trouve dans la situation de la question 1 et les deux roues remplissent entièrement la boîte.

On en déduit que seules les roues de rayons respectifs 4 cm et 9 cm remplissent entièrement la boîte.

(c) Déterminer tous les rayons possibles des roues qui remplissent entièrement une boîte de largeur $L = 64$ cm.
Comme $64 = 8^2$, on en déduit que nécessairement $a + b = 8$. Comme a et b sont deux nombres entiers naturels non nuls avec $a < b$, les couples possibles sont $(1; 7)$; $(2; 6)$; $(3; 5)$ et $(4; 4)$.

- Si $a = 1$ et $b = 7$ alors $r = 1$ cm et $R = 49$ cm. Dans ce cas, la grande roue a un diamètre de 98 cm et elle ne peut pas être contenue dans la boîte de largeur 64 cm.
- Si $a = 2$ et $b = 6$ alors $r = 4$ cm et $R = 36$ cm. Dans ce cas, la grande roue a un diamètre de 72 cm et elle ne peut pas être contenue dans la boîte de largeur 64 cm.
- Si $a = 3$ et $b = 5$ alors $r = 9$ cm et $R = 25$ cm. Dans ce cas, les roues ont respectivement pour diamètres 18 cm et 50 cm : elles remplissent entièrement la boîte.
- Si $a = 4$ et $b = 4$ alors $r = 16$ cm et $R = 16$ cm. Dans ce cas, les roues ont respectivement pour diamètre 32 cm : elles remplissent entièrement la boîte.

On en déduit que les roues qui remplissent la boîte ont pour rayons respectifs 9 cm et 25 cm, ou 16 cm et 16 cm.