MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE LA JEUNESSE ET DES SPORTS
Liberté Égalité Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques 2021

Voie technologique

ACADÉMIE DE NICE
Liberté Égalité Fraternité

Académie de Nice

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie («exercices nationaux»). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie («exercices académiques»). Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercices académiques

Résolution individuelle

Les candidats traitent **les deux exercices**.

Exercice 1 : Les nombres multi-puissances

Soient a et n des entiers naturels non nuls.
On dit que la puissance a^n est « **non triviale** » lorsque $n \geqslant 2$.
Par exemple, 3^2 est une puissance non triviale mais 3^1 ne l'est pas.
On appelle **nombre multi-puissances** un nombre entier naturel supérieur ou égal à deux qui peut s'écrire au moins de deux manières différentes sous la forme de puissances non triviales.
Par exemple, 1296 est un nombre multi-puissances car $1296 = 6^4 = 36^2$, et les puissances 6^4 et 36^2 sont non triviales.
L'objectif de cet exercice est d'étudier quelques nombres multi-puissances.

A. Premiers exemples

1. Démontrer que 64 est un nombre multi-puissances.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel a tel que $a \geqslant 2$, le nombre a^4 est un nombre multi-puissances.
3. Déduire de la question précédente deux autres nombres multi-puissances autres que 1296 et 64.

B. Une condition nécessaire

On admet que si x est un nombre multi-puissances alors il possède au moins deux diviseurs positifs autres que 1 et lui-même.
On notera $D(x)$ l'ensemble des diviseurs positifs de x. Par exemple, $D(64) = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$.

1. Quels sont les diviseurs positifs de 9 ? En déduire que 9 n'est pas un nombre multi-puissances.
2. Démontrer que 7 n'est pas un nombre multi-puissances.
3. On rappelle qu'un nombre premier est un nombre qui admet exactement deux diviseurs positifs différents : 1 et lui-même.
   Un nombre premier peut-il être un nombre multi-puissances ?
4. Trouver un nombre entier naturel $x \geqslant 2$ qui admet au moins deux diviseurs positifs autres que 1 et x et qui ne soit pas un nombre multi-puissances.

C. Puissance irréductible

On appelle **puissance irréductible** d'un nombre multi-puissances l'écriture a^n de ce nombre où a ne peut pas s'écrire sous la forme d'une puissance non triviale.

Par exemple, 36^2 n'est pas une puissance irréductible de 1296 car $36 = 6^2$ tandis que 6^2 est une puissance irréductible de 36 car 6 ne peut pas s'écrire sous la forme d'une puissance non triviale.

On admet qu'un nombre multi-puissances possède une unique écriture sous forme d'une puissance irréductible.

1. On considère le nombre multi-puissances 64.
   (a) Écrire les trois puissances non triviales égales à 64.
   (b) Préciser la puissance irréductible de 64.

Dans la suite du sujet, on admet le résultat suivant : « *Si x est un nombre multi-puissances tel que la puissance irréductible est a^n, alors n n'est pas un nombre premier.* »

2. Démontrer que si a^n est la puissance irréductible d'un nombre multi-puissances x, alors on a $n \geqslant 4$.
3. Démontrer que le plus petit nombre multi-puissances est 16.

Exercice 2 : Deux roues et une boîte

Dans cet exercice, toutes les longueurs sont exprimées en centimètres.
Le but de l'exercice est de remplir une boîte en y plaçant deux roues de rayons respectifs r et R et de centres respectifs A et B. On suppose dans tout l'exercice que $r \leqslant R$.
Il faut que ces roues remplissent entièrement la boîte afin d'éviter les mouvements lors du transport. On ne tient pas compte de l'épaisseur des roues.
On note L la largeur de la boîte.
On note C le point d'intersection de la roue de rayon R avec le fond de la boîte et O le point de la demi-droite $[BC)$ tel que le triangle ABO soit rectangle en O.

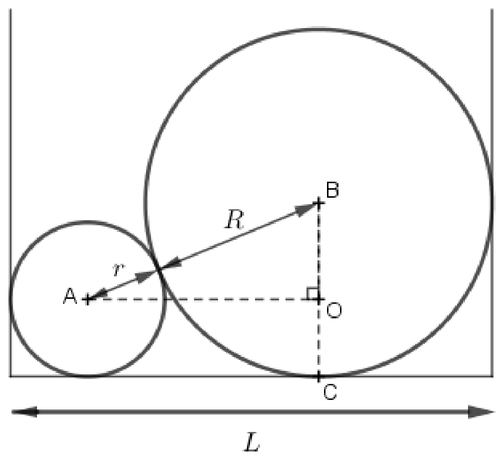

Schéma illustrant la situation

1. Dans cette question, les deux roues ont pour rayons respectifs $r = 4$ cm et $R = 9$ cm.
   (a) Justifier que OB = 5 cm.
   (b) Calculer la longueur AO.
   (c) En déduire la largeur L de la boîte.
2. Deux roues de rayons respectifs 3 cm et 10 cm remplissent-elles entièrement une boîte de largeur 25 cm ? Justifier.

Dans la suite de l'exercice, on se place dans le cas général où les deux roues ont pour rayons respectifs r et R.

3. Démontrer que $L = r + 2\sqrt{rR} + R$.
4. Dans cette question, on suppose qu'il existe deux entiers naturels non nuls a et b tels que $r = a^2$ et $R = b^2$.
   (a) Démontrer que $L = (a + b)^2$.
   (b) Dans cette question, on suppose que $L = 25$ cm.
      i. Déterminer tous les couples $(a; b)$ vérifiant $L = (a + b)^2$.
      ii. En déduire tous les rayons possibles des roues qui remplissent entièrement la boîte.
   (c) Déterminer tous les rayons possibles des roues qui remplissent entièrement une boîte de largeur $L = 64$ cm.