MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE LA JEUNESSE ET DES SPORTS
Liberté Égalité Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques 2022

Voie générale

ACADÉMIE DE NICE
Liberté Égalité Fraternité

Académie de Nice

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie («exercices nationaux»). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie («exercices académiques»). Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercices académiques

Résolution en équipe

Les candidats traitent **les deux exercices**.

Exercice 1 : Nombres cousinades

On rappelle que :

- Un **nombre premier** est un nombre entier naturel ayant exactement deux diviseurs positifs : 1 et lui-même.
- Les nombres premiers inférieurs ou égaux à 50 sont : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.
- 1 n'est pas un nombre premier.
- Un nombre entier naturel non nul peut s'écrire sous la forme d'un **produit de nombres premiers** (éventuellement égaux). De plus, cette écriture est unique à l'ordre près des facteurs.
- Par exemple, $5 \times 5 \times 7$ est l'unique manière d'écrire 175 sous la forme d'un produit de nombres premiers à l'ordre près des facteurs.

Dans cet exercice, on donne la définition suivante :

- On appelle **nombre cousinade** un nombre entier naturel n qui s'écrit sous la forme $n = a \times (a+4)$ où a et $a+4$ sont deux nombres premiers.

Partie A : *Premières recherches*

1. Démontrer que 77 est un nombre cousinade.
2. Démontrer que 141 n'est pas un nombre cousinade.
3. Existe-t-il un nombre cousinade qui soit un nombre pair ? Justifier.
4. En utilisant la liste des nombres premiers, donner les quatre plus petits nombres cousinades.

Partie B : *Test*

1. Soit n un nombre cousinade tel que $n = a \times (a+4)$ où a et $a+4$ sont des nombres premiers.
   (a) Démontrer que l'on a : $n + 4 = (a+2)^2$.
   (b) En déduire que l'on a : $a = \sqrt{n+4} - 2$.
2. En s'aidant de la question B.1 et en explicitant la démarche, dire pour chacun des nombres suivants s'il est un nombre cousinade :

2021, 2022, 2112

Partie C : *Implémentation du test*

En langage Python, on rappelle que si `a` désigne un entier naturel non nul :

- l'instruction `range(1,a+1)` correspond à la liste des entiers naturels compris entre 1 et `a` inclus ;
- `a % d` est le reste dans la division euclidienne de l'entier `a` par un entier naturel non nul `d` ;
- `a == b` renvoie `True` si `a` et `b` sont égaux, `False` sinon.

On considère la fonction **mystère** écrite en langage Python prenant pour argument, en entrée, un entier naturel **a** non nul :

```python
def mystère(a):
    compteur = 0
    for d in range(1, a + 1):
        if a % d == 0:
            compteur = compteur + 1
    return compteur == 2
```

Voici un exemple d'utilisation de cette fonction :

```
>>> mystère(7)
True
>>> mystère(155)
False
```

1. Préciser le rôle de la fonction `mystère`.

On dispose des deux instructions suivantes :

- l'instruction `est_entier(x)` retourne `True` si le nombre `x` est un nombre entier naturel et `False` dans le cas contraire ;
- l'instruction `racine_carree(x)` calcule une valeur approchée de $\sqrt{\mathtt{x}}$ où `x` est un nombre réel positif.

2. Soit `n` un entier naturel non nul. Recopier et proposer la suite de la fonction `est_cousinade(n)` qui renvoie `True` si `n` est un nombre cousinade et `False` sinon. On pourra utiliser la fonction `mystère` et les deux instructions précédentes.

```python
def est_cousinade(n):
    ...
```

Partie D : ***Tentative de recherche d'une expression***

On rappelle que :

- la division euclidienne d'un entier naturel a par 6 s'écrit : $a = 6 \times q + r$ où q et r sont les uniques entiers tels que $0 \leqslant r < 6$;
- q est le quotient et r est le reste de cette division euclidienne.

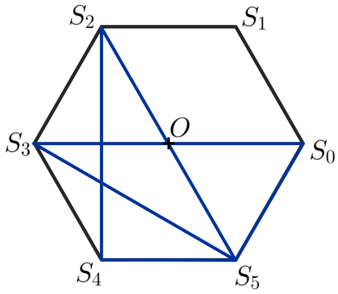
1. Soit a un entier naturel supérieur ou égal à 5. Soit r le reste de la division euclidienne de a par 6.
   (a) Démontrer que si le reste r est égal à 0 ou 2 ou 3 ou 4, alors a n'est pas un nombre premier.
   (b) Démontrer que si le reste r est égal à 5, alors $a + 4$ n'est pas un nombre premier.
2. Soit n un nombre cousinade dont les facteurs premiers sont a et $a + 4$ tels que $a \geqslant 5$.
   Démontrer alors que l'on a $n = 36q^2 + 36q + 5$ où $q > 0$.
3. Est-il vrai que pour tout entier naturel q non nul, le nombre $36q^2 + 36q + 5$ est un nombre cousinade ? Justifier.

Exercice 2 : Triplangles

Dans tout l'exercice :

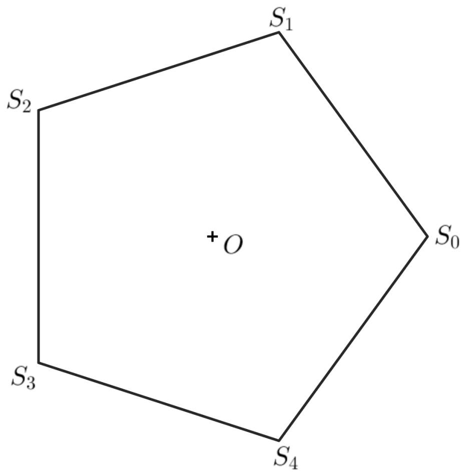
- N est un nombre entier supérieur ou égal à 3.
- a, b et c désignent des nombres entiers naturels vérifiant $0 \leqslant a < b < c \leqslant N-1$.
- P_N est un polygone régulier à N côtés dont les sommets sont successivement nommés S_0, S_1, ..., S_{N-1} et O son centre.
- $S_aS_bS_c$ est un triangle dont les sommets sont des sommets de P_N.
- Deux triangles sont « de la même famille » s'ils sont superposables.

Par exemple, dans le polygone régulier P_6 ci-contre, sont représentés les triangles $S_2S_4S_5$ et $S_0S_3S_5$. Les triangles $S_2S_4S_5$ et $S_0S_3S_5$ sont superposables : ils sont « de la même famille ».



Partie A : Étude géométrique de P_5

Dans cette partie, on considère $N = 5$. Pour chaque question, **aucune justification n'est attendue**.



1. Les triangles $S_1S_3S_4$ et $S_0S_2S_3$ sont-ils « de la même famille » ?
2. Les triangles $S_1S_2S_3$ et $S_0S_2S_3$ sont-ils « de la même famille » ?
3. Citer les triangles « de la même famille » que $S_1S_3S_4$.
4. (a) Combien de triangles peut-on tracer en reliant des sommets de P_5 ?

   (b) On souhaite tracer ces triangles en respectant les règles suivantes :

   - si deux triangles sont « de la même famille » alors ils sont tracés avec la même couleur ;
   - si deux triangles ne sont pas « de la même famille » alors ils sont tracés avec des couleurs différentes.

   Combien de couleurs faut-il utiliser pour tracer tous les triangles dont les sommets sont les sommets de P_5 ?

On rappelle que a, b et c désignent des nombres entiers naturels vérifiant $0 \leqslant a < b < c \leqslant N-1$.

Dans la suite de l'exercice, on considère la définition suivante.

Le nombre entier $T_{a,b,c}$, appelé N-triplangle, est défini par :

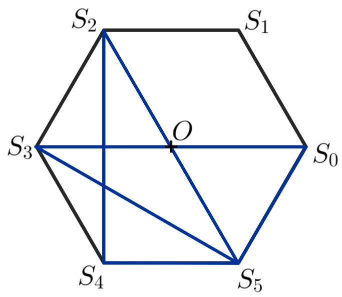
$$T_{a,b,c} = aN^2 + bN + c$$

On admet que :

- à tout triangle $S_aS_bS_c$ on associe l'unique N-triplangle $T_{a,b,c}$;
- réciproquement, tout N-triplangle $T_{a,b,c}$ est associé à un unique triangle $S_aS_bS_c$.

Par exemple, pour $N = 6$:

- le 6-triplangle associé au triangle $S_2S_4S_5$ est $T_{2,4,5} = 2 \times 6^2 + 4 \times 6 + 5 = 101$.
- le 6-triplangle associé au triangle $S_0S_3S_5$ est $T_{0,3,5} = 0 \times 6^2 + 3 \times 6 + 5 = 23$.



Partie B : Étude numérique de P_5

Dans cette partie, on considère $N = 5$.

1. Calculer le 5-triplangle $T_{1,2,3}$.
2. Quel 5-triplangle est associé au triangle de l'annexe 1 ?
3. (a) Quel triangle est associé au 5-triplangle 44 ?
   (b) Tracer ce triangle sur l'annexe 1 à rendre avec la copie.
   (c) Quelle est la nature de ce triangle ?
4. Le nombre 73 est-il un 5-triplangle ? Justifier.
5. Déterminer tous les 5-triplangles.

Partie C : Étude de P_{10}

Dans cette partie, on considère $N = 10$.

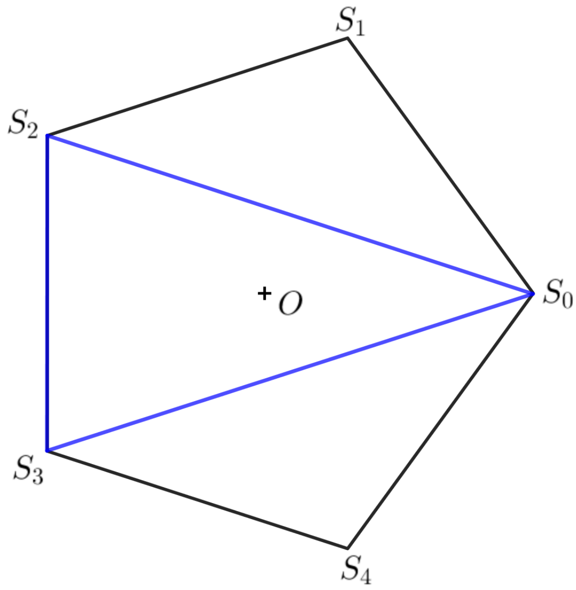
P_{10} est un polygone régulier à 10 côtés dont les sommets sont successivement nommés S_0, S_1, ..., S_9 : ce polygone est représenté dans les annexes 2 et 3 **à rendre avec la copie**. Pour les recherches, une planche de 6 polygones P_{10} est fournie en page 7 : elle **n'est pas à rendre avec la copie**.

1. (a) Quel est le triangle associé au 10-triplangle 19 ?
   (b) Sur l'annexe 2, tracer ce triangle ainsi que tous ceux « de la même famille » que celui-ci.
2. (a) Quel est le triangle associé au 10-triplangle 256 ?
   (b) Sur l'annexe 3, tracer ce triangle ainsi que tous ceux « de la même famille » que celui-ci.
3. Montrer que l'on peut tracer 120 triangles en reliant des sommets de P_{10}.
4. En respectant les mêmes règles qu'à la question A. 4. (b), combien de couleurs faut-il utiliser pour tracer tous les triangles dont les sommets sont les sommets de P_{10} ?

Annexes de l'exercice 2
À remettre avec la copie

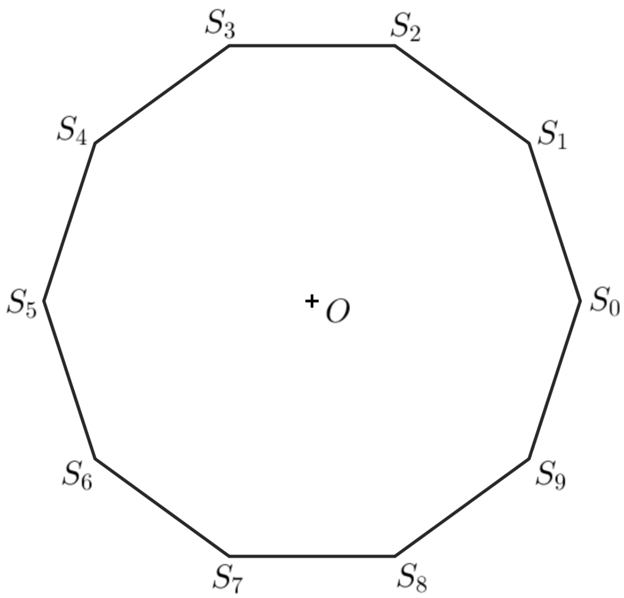
Annexe 1

Exercice 2, questions B.2 et B.3.(b)



Annexe 2

Exercice 2, question C.1.(b)



Annexe 3

Exercice 2, question C.2.(b)

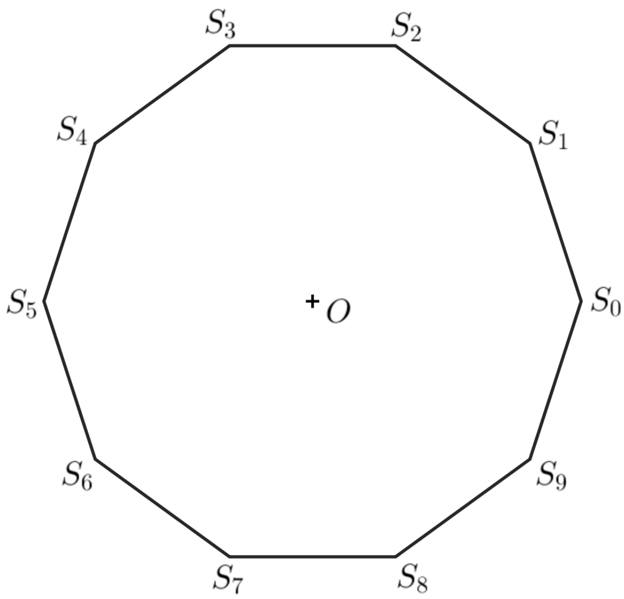


Planche de polygones pour l'exercice 2 - Partie C
À ne pas remettre avec la copie