

Olympiades nationales de mathématiques 2022

Voie générale

Académie de Nice

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie («exercices nationaux»). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie («exercices académiques»). Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercices académiques

Résolution en équipe

Les candidats traitent **les deux exercices**.



Exercice 1 : Nombres cousinades

On rappelle que :

- Un **nombre premier** est un nombre entier naturel ayant exactement deux diviseurs positifs : 1 et lui-même.
- Les nombres premiers inférieurs ou égaux à 50 sont : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.
- 1 n'est pas un nombre premier.
- Un nombre entier naturel non nul peut s'écrire sous la forme d'un **produit de nombres premiers** (éventuellement égaux). De plus, cette écriture est unique à l'ordre près des facteurs.
- Par exemple, $5 \times 5 \times 7$ est l'unique manière d'écrire 175 sous la forme d'un produit de nombres premiers à l'ordre près des facteurs.

Dans cet exercice, on donne la définition suivante :

- On appelle **nombre cousinade** un nombre entier naturel n qui s'écrit sous la forme $n = a \times (a + 4)$ où a et $a + 4$ sont deux nombres premiers.

Partie A : Premières recherches

1. Démontrer que 77 est un nombre cousinade.

On pose $a = 7$ et on obtient $77 = 7 \times 11 = a \times (a + 4)$ où $a = 7$ et $a + 4 = 11$ sont des nombres premiers. Ainsi 77 est un nombre cousinade.

2. Démontrer que 141 n'est pas un nombre cousinade.

On remarque que 141 est divisible par 3 :

$$141 = 3 \times 47$$

47 et 3 sont des nombres premiers mais dont la différence n'est pas égale à 4. D'après l'unicité de l'écriture d'un nombre en facteurs premiers, 141 n'est pas un nombre cousinade.

Alternative : on résout l'équation $141 = x \times (x + 4)$ d'inconnu le nombre réel x .

$141 = x \times (x + 4) \Leftrightarrow x^2 + 4x - 141 = 0$, on a donc une équation du second degré dont le discriminant est $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times (-141) = 580$. Cette équation admet deux solutions qui sont

$x_1 = \frac{-4 - 2\sqrt{145}}{2} = -2 - \sqrt{145}$ et $x_2 = \frac{-4 + 2\sqrt{145}}{2} = -2 + \sqrt{145}$ qui ne sont pas des nombres entiers. Ainsi 141 n'est pas un nombre cousinade.

3. Existe-t-il un nombre cousinade qui soit un nombre pair ? Justifier.

On raisonne par l'absurde. S'il existe un nombre cousinade n qui soit pair alors il serait divisible par 2 qui est un nombre premier. D'après le résultat donné en introduction, 2 serait nécessairement un des deux facteurs cousins. Or 2 n'admet pas de cousin car $2 + 4 = 6$ n'est pas premier. Il n'existe donc pas de nombre cousinade pair.

4. En utilisant la liste des nombres premiers, donner les quatre plus petits nombres cousinades.

En utilisant la liste des premiers nombres premiers on en déduit les quatre plus petits nombres cousinades :

$$\begin{aligned}
3 \times 7 &= 21 \\
7 \times 11 &= 77 \\
13 \times 17 &= 221 \\
19 \times 23 &= 437
\end{aligned}$$

Partie B : Test

- Soit n un nombre cousinade tel que $n = a \times (a + 4)$ où a et $a + 4$ sont des nombres premiers.
 - Démontrer que l'on a : $n + 4 = (a + 2)^2$.
 $n + 4 = a \times (a + 4) + 4 = a^2 + 4a + 4 = (a + 2)^2$ en utilisant une des identités remarquables.
 - En déduire que l'on a : $a = \sqrt{n + 4} - 2$.
 D'après la question précédente, on a $n + 4 = (a + 2)^2$ d'où $a + 2 = \sqrt{n + 4}$ et donc $a = \sqrt{n + 4} - 2$.
- En s'aidant de la question B.1 et en explicitant la démarche, dire pour chacun des nombres suivants s'il est un nombre cousinade :

2021, 2022, 2112

- On pose $n = 2021$ et on considère $a = \sqrt{n + 4} - 2 = \sqrt{2025} - 2 = 45 - 2 = 43$. De plus $a \times (a + 4) = 43 \times 47 = 2021$ où 43 et 47 sont des nombres premiers. Ainsi 2021 est un nombre cousinade.
- On pose $n = 2022$ et on considère $a = \sqrt{n + 4} - 2 = \sqrt{2026} - 2$ où $\sqrt{2026}$ n'est pas un nombre entier. Ainsi a n'est pas non plus un nombre entier donc 2022 n'est pas un nombre cousinade.
- On pose $n = 2112$ et on considère $a = \sqrt{n + 4} - 2 = \sqrt{2116} - 2 = 46 - 2 = 44$ qui n'est pas un nombre premier car $44 = 2 \times 22$. Ainsi 2112 n'est pas un nombre cousinade.

Partie C : Implémentation du test

En langage Python, on rappelle que si a désigne un entier naturel non nul :

- l'instruction `range(1,a+1)` correspond à la liste des entiers naturels compris entre 1 et a inclus ;
- $a \% d$ est le reste dans la division euclidienne de l'entier a par un entier naturel non nul d ;
- $a == b$ renvoie `True` si a et b sont égaux, `False` sinon.

On considère la fonction **mystère** écrite en langage Python prenant pour argument, en entrée, un entier naturel a non nul :

```
def mystère(a):
    compteur = 0
    for d in range(1, a + 1):
        if a % d == 0:
            compteur = compteur + 1
    return compteur == 2
```

Voici un exemple d'utilisation de cette fonction :

```
>>> mystère(7)
True
>>> mystère(155)
False
```

1. Préciser le rôle de la fonction `mystère`.

Le rôle de la fonction `mystère` est de retourner `True` si `a` est un nombre premier et `False` sinon.

On dispose des deux instructions suivantes :

- l'instruction `est_entier(x)` retourne `True` si le nombre `x` est un nombre entier naturel et `False` dans le cas contraire ;
- l'instruction `racine_carree(x)` calcule une valeur approchée de $\sqrt{x}$ où `x` est un nombre réel positif.

2. Soit `n` un entier naturel non nul. Recopier et proposer la suite de la fonction `est_cousinade(n)` qui renvoie `True` si `n` est un nombre cousinade et `False` sinon. On pourra utiliser la fonction `mystère` et les deux instructions précédentes.

```
def est_cousinade(n):
    ...
```

```
def est_cousinade(n):
    a = racine(n + 4) - 2
    return est_entier(a) and mystère(int(a)) and mystère(int(a+4))
```

On acceptera `mystère(a)` à la place de `mystère(int(a))` bien que `mystère(a)` produise une erreur car `a` ne désigne pas une variable de type entier.

On donne à titre indicatif comment définir les fonctions proposées dans la question :

```
from math import sqrt

def est_entier(x):
    return x == int(x)

def racine(x):
    return sqrt(x)
```

Partie D : *Tentative de recherche d'une expression*

On rappelle que :

- la division euclidienne d'un entier naturel a par 6 s'écrit : $a = 6 \times q + r$ où q et r sont les uniques entiers tels que $0 \leq r < 6$;
- q est le quotient et r est le reste de cette division euclidienne.

1. Soit a un entier naturel supérieur ou égal à 5. Soit r le reste de la division euclidienne de a par 6.

(a) Démontrer que si le reste r est égal à 0 ou 2 ou 3 ou 4, alors a n'est pas un nombre premier.

Soit a un nombre entier tel que $a \geq 5$.

Si r est dans $\{0, 2, 4\}$ alors $a = 2 \times 3 \times q + r$ est un nombre pair en tant que somme de deux nombres pairs. Hors il n'existe pas de nombre premier pair autre que 2, comme $a \geq 5$, a ne peut pas être premier.

Si $r = 3$ alors $a = 3 \times (2q + 1)$ où $2q + 1$ est un nombre entier donc 3 divise a , ainsi a ne peut pas être un nombre premier.

(b) Démontrer que si le reste r est égal à 5, alors $a + 4$ n'est pas un nombre premier.

Si $r = 5$ alors on a $a = 6q + 5$ d'où $a + 4 = 6q + 9 = 3(2q + 3)$ où $2q + 3$ est un nombre entier. Ainsi 3 divise $a + 4$ qui est un nombre entier supérieur ou égal à 4. On en déduit que $a + 4$ n'est pas un nombre premier.

2. Soit n un nombre cousinade dont les facteurs premiers sont a et $a + 4$ tels que $a \geq 5$.

Démontrer alors que l'on a $n = 36q^2 + 36q + 5$ où $q > 0$.

D'après les deux questions précédentes, on a nécessairement $r = 1$ d'où $a = 6q + 1$. Comme $a \geq 5$, on a $6q + 1 \geq 5$ d'où $q > 0$. Enfin $n = a \times (a + 4) = (6q + 1) \times (6q + 5) = 36q^2 + 36q + 5$.

3. Est-il vrai que pour tout entier naturel q non nul, le nombre $36q^2 + 36q + 5$ est un nombre cousinade? Justifier.

On peut faire un tableau de valeurs de la fonction $f : x \mapsto 36q^2 + 36q + 5$:

NORMAL FLOTT AUTO a+bi RAD MP					
APP SUR + POUR ΔTb1					
X	Y1				
0	5				
1	77				
2	221				
3	437				
4	725				
5	1085				
6	1517				
7	2021				
8	2597				
9	3245				
10	3965				
X=0					

En posant $n = f(4) = 725$ et $a = \sqrt{n + 4} - 2 = \sqrt{729} - 2 = 25$, on remarque que a n'est pas un nombre premier, d'après la question 2, $n = f(4)$ n'est pas un nombre cousinade. Il n'est donc pas vrai que pour tout entier naturel q non nul, le nombre $36q^2 + 36q + 5$ soit un nombre cousinade.

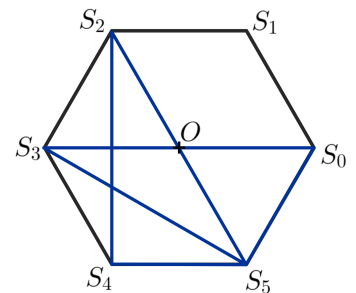
Remarque : néanmoins, excepté 21, tous les nombres cousinades sont de cette forme !

Exercice 2 : Triangles

Dans tout l'exercice :

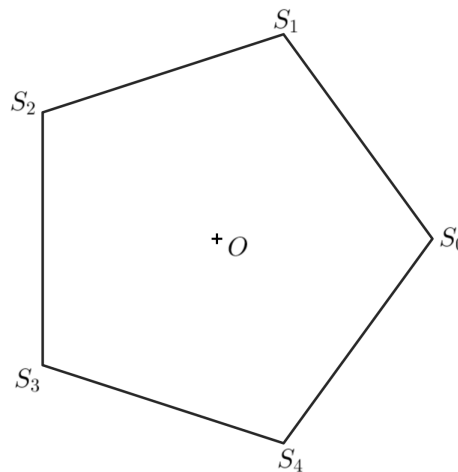
- N est un nombre entier supérieur ou égal à 3.
- a, b et c désignent des nombres entiers naturels vérifiant $0 \leq a < b < c \leq N - 1$.
- P_N est un polygone régulier à N côtés dont les sommets sont successivement nommés $S_0, S_1, \dots, S_{N-1}$ et O son centre.
- $S_a S_b S_c$ est un triangle dont les sommets sont des sommets de P_N .
- Deux triangles sont « de la même famille » s'ils sont superposables.

Par exemple, dans le polygone régulier P_6 ci-contre, sont représentés les triangles $S_2 S_4 S_5$ et $S_0 S_3 S_5$. Les triangles $S_2 S_4 S_5$ et $S_0 S_3 S_5$ sont superposables : ils sont « de la même famille ».



Partie A : Étude géométrique de P_5

Dans cette partie, on considère $N = 5$. Pour chaque question, **aucune justification n'est attendue**.



1. Les triangles $S_1 S_3 S_4$ et $S_0 S_2 S_3$ sont-ils « de la même famille » ?
Oui, le triangle $S_1 S_3 S_4$ est le triangle $S_0 S_2 S_3$ sont superposables.
2. Les triangles $S_1 S_2 S_3$ et $S_0 S_2 S_3$ sont-ils « de la même famille » ?
Non, le triangle $S_1 S_2 S_3$ et le triangle $S_0 S_2 S_3$ ne sont pas superposables.
3. Citer les triangles « de la même famille » que $S_1 S_3 S_4$.
Les triangles de la même famille que $S_1 S_3 S_4$ sont $S_0 S_2 S_4$, $S_0 S_1 S_3$, $S_1 S_2 S_4$, $S_0 S_2 S_3$.
4. (a) Combien de triangles peut-on tracer en reliant des sommets de P_5 ?
On peut tracer $(5 \times 4 \times 3) \div 6 = 10$ triangles en reliant des sommets de P_5 .

(b) On souhaite tracer ces triangles en respectant les règles suivantes :

- si deux triangles sont « de la même famille » alors ils sont tracés avec la même couleur ;
- si deux triangles ne sont pas « de la même famille » alors ils sont tracés avec des couleurs différentes.

Combien de couleurs faut-il utiliser pour tracer tous les triangles dont les sommets sont les sommets de P_5 ?

On utilise deux couleurs. Une pour le triangle $S_1S_2S_3$ et les triangles de la même famille. Une autre pour le triangle $S_0S_2S_3$ et les triangles de la même famille.

On rappelle que a , b et c désignent des nombres entiers naturels vérifiant $0 \leq a < b < c \leq N - 1$.

Dans la suite de l'exercice, on considère la définition suivante.

Le nombre entier $T_{a,b,c}$, appelé N -triplangle, est défini par :

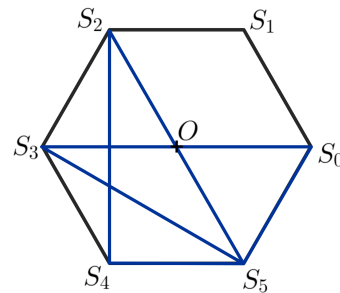
$$T_{a,b,c} = aN^2 + bN + c$$

On admet que :

- à tout triangle $S_aS_bS_c$ on associe l'unique N -triplangle $T_{a,b,c}$;
- réciproquement, tout N -triplangle $T_{a,b,c}$ est associé à un unique triangle $S_aS_bS_c$.

Par exemple, pour $N = 6$:

- le 6-triplangle associé au triangle $S_2S_4S_5$ est $T_{2,4,5} = 2 \times 6^2 + 4 \times 6 + 5 = 101$.
- le 6-triplangle associé au triangle $S_0S_3S_5$ est $T_{0,3,5} = 0 \times 6^2 + 3 \times 6 + 5 = 23$.



Partie B : Étude numérique de P_5

Dans cette partie, on considère $N = 5$.

1. Calculer le 5-triplangle $T_{1,2,3}$.

$$T_{1,2,3} = 1 \times 5^2 + 2 \times 5 + 3 = 38$$

2. Quel 5-triplangle est associé au triangle de l'annexe 1 ?

Le triangle $S_0S_2S_3$ est associé au triplangle $T_{0,2,3} = 0 \times 5^2 + 2 \times 5 + 3 = 13$.

3. (a) Quel triangle est associé au 5-triplangle 44 ?

Comme 44 peut s'écrire sous la forme $a \times 5^2 + b \times 5 + c$ avec $a = 1$, $b = 3$ et $c = 4$, 44 est le 5-triplangle associé au triangle $S_1S_3S_4$.

- (b) Tracer ce triangle sur l'annexe 1 à rendre avec la copie.

Tracer le triangle $S_1S_3S_4$.

- (c) Quelle est la nature de ce triangle ?

P_5 est un polygone régulier, par conséquent tous ses angles sont égaux et tous ses côtés ont la même longueur. On en déduit que les triangles $S_1S_2S_3$ et $S_1S_0S_4$ sont égaux. Par conséquent, les côtés homologues $[S_1S_3]$ et $[S_1S_4]$ ont la même longueur. Le triangle $S_1S_3S_4$ est donc isocèle.

4. Le nombre 73 est-il un 5-triangles ? Justifier.

Par l'absurde, supposons qu'il existe trois nombres entiers a, b, c vérifiant $0 \leq a < b < c < 5$ et $73 = a \times 5^2 + b \times 5 + c$.

Si $a < 2$, alors $-a \times 25 > -50$ et donc $73 - a \times 25 = b \times 5 + c > 23$. Or $b \times 5 + c$ est majoré par $3 \times 5 + 4 = 19$. Donc $b \times 5 + c$ ne peut être strictement supérieur à 23. Par conséquent, comme $0 \leq a < b < c < 5$, on en déduit que $a = 2, b = 3$ et $c = 4$.

Or $2 \times 5^2 + 3 \times 5 + 4 = 69 \neq 73$, on aboutit donc à une contradiction.

Il n'existe pas trois nombres entiers a, b, c vérifiant $0 \leq a < b < c < 5$ et $73 = a \times 5^2 + b \times 5 + c$: le nombre 73 n'est pas un 5-triangles.

5. Déterminer tous les 5-triangles.

L'ensemble des 5-triangles est $\{7, 8, 9, 13, 14, 19, 38, 39, 44, 69\}$: il en existe 10. Ils sont associés aux 10 triangles que l'on peut tracer en reliant des sommets de P_5 .

Partie C : Étude de P_{10}

Dans cette partie, on considère $N = 10$.

P_{10} est un polygone régulier à 10 côtés dont les sommets sont successivement nommés $S_0, S_1, \dots, S_9$: ce polygone est représenté dans les annexes 2 et 3 à rendre avec la copie. Pour les recherches, une planche de 6 polygones P_{10} est fournie en page 7 : elle n'est pas à rendre avec la copie.

1. (a) Quel est le triangle associé au 10-triangles 19 ?

Comme 19 peut s'écrire sous la forme $a \times 10^2 + b \times 10 + c$ avec $a = 0, b = 1$ et $c = 9$, 19 est le 5-triangles associé au triangle $S_0S_1S_9$.

- (b) Sur l'annexe 2, tracer ce triangle ainsi que tous ceux « de la même famille » que celui-ci.

Les triangles de la même famille que $S_0S_1S_9$ sont $S_0S_1S_2, S_1S_2S_3, S_2S_3S_4, S_3S_4S_5, S_4S_5S_6, S_5S_6S_7, S_6S_7S_8, S_7S_8S_9, S_0S_8S_9$.

2. (a) Quel est le triangle associé au 10-triangles 256 ?

Comme 256 peut s'écrire sous la forme $a \times 10^2 + b \times 10 + c$ avec $a = 2, b = 5$ et $c = 6$, 256 est le 10-triangles associé au triangle $S_2S_5S_6$.

- (b) Sur l'annexe 3, tracer ce triangle ainsi que tous ceux « de la même famille » que celui-ci.

Les triangles de la même famille que $S_2S_5S_6$ sont $S_0S_1S_4, S_0S_1S_7, S_0S_3S_4, S_0S_3S_9, S_0S_6S_7, S_0S_6S_9, S_1S_2S_5, S_1S_2S_8, S_1S_4S_5, S_1S_7S_8, S_2S_3S_6, S_2S_3S_9, S_2S_8S_9, S_3S_4S_7, S_3S_6S_7, S_4S_5S_8, S_4S_7S_8, S_5S_6S_9, S_5S_8S_9$.

3. Montrer que l'on peut tracer 120 triangles en reliant des sommets de P_{10} .

Il s'agit de dénombrer les triplets d'entier (a, b, c) vérifiant $0 \leq a < b < c < 10$.

Si $a = 0$, on en dénombre $8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36$.

Si $a = 1$, on en dénombre $7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28$.

Si $a = 2$, on en dénombre $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$.

...

Si $a = 7$, on en dénombre 1.

Finalement, on peut tracer $36 + 28 + 21 + 15 + 10 + 6 + 3 + 1 = 120$ triangles en reliant des sommets de P_{10} .

On obtient le même résultat par le calcul du quotient $(10 \times 9 \times 8) \div 6 = 120$.

4. En respectant les mêmes règles qu'à la question A. 4. (b), combien de couleurs faut-il utiliser pour tracer tous les triangles dont les sommets sont les sommets de P_{10} ?

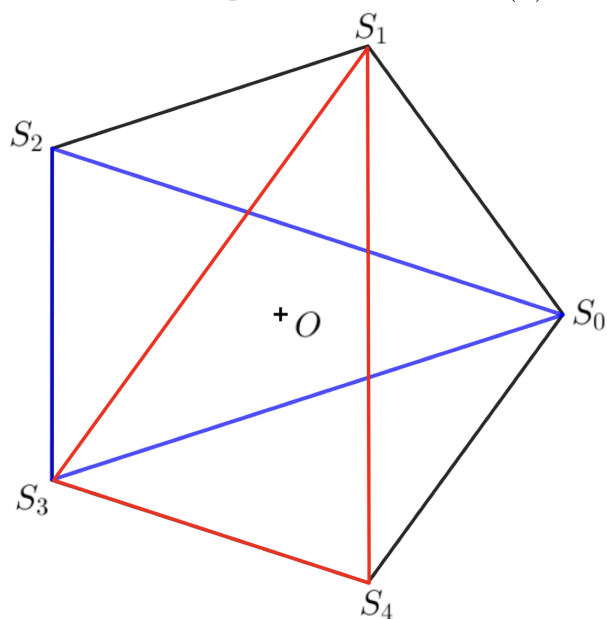
Il en faut 8 pour tracer avec des couleurs différentes les triangles suivants et ceux de leur famille $S_0S_1S_2, S_0S_1S_3, S_0S_1S_4, S_0S_1S_5, S_0S_2S_4, S_0S_2S_5, S_0S_2S_6, S_0S_3S_6$.

Annexes de l'exercice 2

À remettre avec la copie

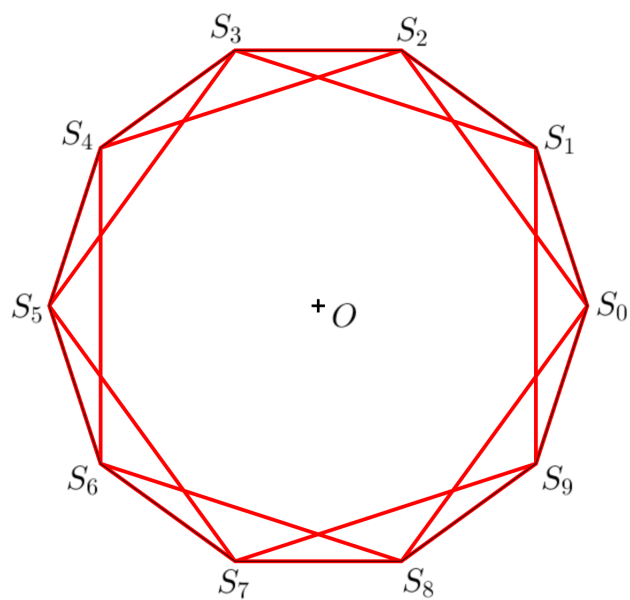
Annexe 1

Exercice 2, questions B.2 et B.3.(b)



Annexe 2

Exercice 2, question C.1.(b)



Annexe 3

Exercice 2, question C.2.(b)

