

Académie de Nice

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie («exercices nationaux»). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie («exercices académiques»). Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercices académiques

Résolution en équipe

Les candidats traitent **les deux exercices**.



Exercice 1 : Bataille d'intelligences artificielles

Un informaticien programme deux intelligences artificielles que l'on désignera par IA1 et IA2.

Dans tout l'exercice, N désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Dans un tableau à 2 lignes et N colonnes, IA1 coche au hasard des cases sur la première ligne horizontale et IA2 coche, sans connaître le choix de IA1, des cases encore au hasard sur la deuxième ligne.

Si deux cases de la même colonne sont cochées alors IA2 a gagné et IA1 a perdu. Dans le cas contraire, IA1 a gagné et IA2 a perdu.

Les résultats pourront être justifiés en utilisant un tableau de deux lignes sur le modèle ci-contre. Dans cet exemple, $N = 4$, IA2 a gagné et IA1 a perdu.

IA1 →	×	×		
IA2 →	×			

Partie A - Les choix de IA1

- Sur sa ligne horizontale de N cases, IA1 coche **deux cases adjacentes** c'est-à-dire **l'une à côté de l'autre**.
 - Dans cette question, $N = 4$. Combien y a-t-il de possibilités pour cocher ces deux cases ?
 - Dans cette question, $N = 6$. Combien y a-t-il de possibilités pour cocher ces deux cases ?
- On note $D_1(N)$ le nombre de possibilités de cocher deux cases adjacentes.
 - Que vaut $D_1(2)$?
 - Exprimer $D_1(N)$ en fonction de N . On acceptera la réponse sans démonstration.
- Dans cette question, N est un entier naturel supérieur ou égal à 4. Sur sa ligne horizontale de N cases, IA1 coche **deux cases adjacentes** puis, parmi les cases restantes, il coche de nouveau **deux cases adjacentes**. On note $D_2(N)$ le nombre de possibilités de cocher ainsi ces quatre cases.
 - Que vaut $D_2(4)$?
 - Justifier que $D_2(5) = 3$.
 - Que vaut $D_2(7)$?

Partie B - Au tour de IA2

Désormais, on s'intéresse aux parties différentes possibles entre IA1 et IA2.

Situation 1 : IA1 coche au hasard **deux cases adjacentes** sur sa ligne et IA2 coche au hasard **une seule case** sur sa ligne.

- Dans cette question, $N = 3$. Justifier que 6 parties différentes sont possibles. En déduire la probabilité que IA2 gagne dans ce cas.
 - Dans cette question, $N = 4$. Sur l'annexe à rendre avec la copie, représenter toutes les parties différentes possibles. En déduire la probabilité que IA2 gagne.

2. Désormais, N est un entier naturel supérieur ou égal à 4.

- (a) Justifier que $(N - 1) \times N$ parties différentes sont possibles.
- (b) Quelle est la probabilité que IA2 gagne la partie si la case cochée par IA2 est dans la première colonne ?
- (c) Quelle est la probabilité que IA2 gagne la partie ?

Situation 2 : sur sa ligne, IA1 coche **deux cases adjacentes** puis, parmi les cases restantes, il coche de nouveau **deux cases adjacentes**. IA2 coche au hasard **une seule case** sur sa ligne.

3. Dans cette question, $N = 5$.

- (a) Justifier que 15 parties sont possibles.
- (b) Montrer que la probabilité que IA2 gagne est $\frac{4}{5}$.

4. Dans cette question, $N = 6$.

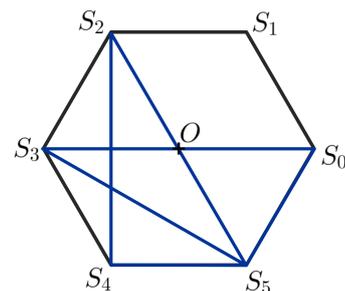
- (a) Combien y a-t-il de parties possibles ?
- (b) Justifier que, si la case cochée par IA2 est dans la première colonne, il y a 3 parties perdantes pour IA2.
- (c) Montrer que, si la case cochée par IA2 n'est pas dans la première colonne, il y a encore 9 parties perdantes pour IA2.
- (d) Qui de IA1 ou IA2 a le plus de chance de gagner ?

Exercice 2 : Triangles en couleurs

Dans tout l'exercice :

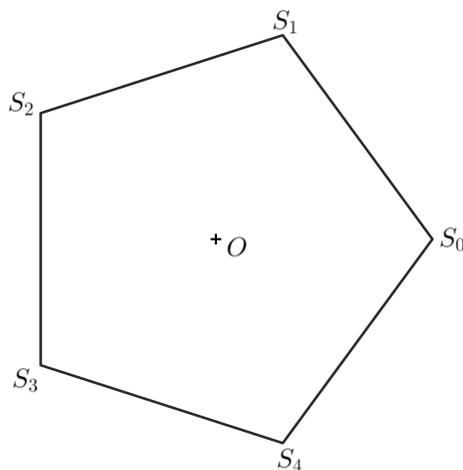
- N est un nombre entier supérieur ou égal à 3.
- a, b et c désignent des nombres entiers naturels vérifiant $0 \leq a < b < c \leq N - 1$.
- P_N est un polygone régulier à N côtés dont les sommets sont successivement nommés S_0, S_1, \dots, S_{N-1} et O son centre.
- $S_a S_b S_c$ est un triangle dont les sommets sont des sommets de P_N .
- Deux triangles sont « de la même famille » s'ils sont superposables.

Par exemple, dans le polygone régulier P_6 ci-contre, sont représentés les triangles $S_2 S_4 S_5$ et $S_0 S_3 S_5$. Les triangles $S_2 S_4 S_5$ et $S_0 S_3 S_5$ sont superposables : ils sont « de la même famille ».



Partie A : Étude géométrique de P_5

Dans cette partie, on considère $N = 5$. Pour chaque question, **aucune justification n'est attendue**.



1. Les triangles $S_1 S_3 S_4$ et $S_0 S_2 S_3$ sont-ils « de la même famille » ?
2. Les triangles $S_1 S_2 S_3$ et $S_0 S_2 S_3$ sont-ils « de la même famille » ?
3. Citer les triangles « de la même famille » que $S_1 S_3 S_4$.
4. (a) Combien de triangles peut-on tracer en reliant des sommets de P_5 ?
 (b) On souhaite tracer ces triangles en respectant les règles suivantes :
 - si deux triangles sont « de la même famille » alors ils sont tracés avec la même couleur ;
 - si deux triangles ne sont pas « de la même famille » alors ils sont tracés avec des couleurs différentes.

Combien de couleurs faut-il utiliser pour tracer tous les triangles dont les sommets sont les sommets de P_5 ?

On rappelle que a , b et c désignent des nombres entiers naturels vérifiant $0 \leq a < b < c \leq N - 1$.

Dans la suite de l'exercice, on considère la définition suivante.

Le nombre entier $T_{a,b,c}$, appelé N -triplange, est défini par :

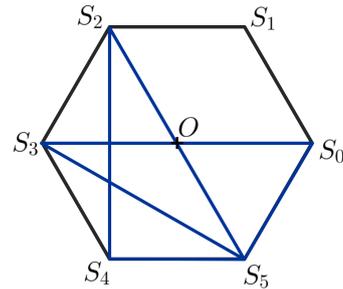
$$T_{a,b,c} = aN^2 + bN + c$$

On admet que :

- à tout triangle $S_a S_b S_c$ on associe l'unique N -triplange $T_{a,b,c}$;
- réciproquement, tout N -triplange $T_{a,b,c}$ est associé à un unique triangle $S_a S_b S_c$.

Par exemple, pour $N = 6$:

- le 6-triplange associé au triangle $S_2 S_4 S_5$ est $T_{2,4,5} = 2 \times 6^2 + 4 \times 6 + 5 = 101$.
- le 6-triplange associé au triangle $S_0 S_3 S_5$ est $T_{0,3,5} = 0 \times 6^2 + 3 \times 6 + 5 = 23$.



Partie B : Étude numérique de P_5

Dans cette partie, on considère $N = 5$.

1. Calculer le 5-triplange $T_{1,2,3}$.
2. Quel 5-triplange est associé au triangle de l'annexe 1 ?
3. (a) Quel triangle est associé au 5-triplange 44 ?
(b) Tracer ce triangle sur l'annexe 1 à rendre avec la copie.
(c) Quelle est la nature de ce triangle ?
4. Le nombre 73 est-il un 5-triplange ? Justifier.
5. Déterminer tous les 5-triplanges.

Annexes - À rendre avec la copie

Annexe - Exercice 1 - Partie B, question 1.(b)

IA1 →	<table border="1"><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>									IA1 →	<table border="1"><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>									IA1 →	<table border="1"><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>								
IA2 →	<table border="1"><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>									IA2 →	<table border="1"><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>									IA2 →	<table border="1"><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>								
IA1 →	<table border="1"><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>									IA1 →	<table border="1"><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>									IA1 →	<table border="1"><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>								
IA2 →	<table border="1"><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>									IA2 →	<table border="1"><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>									IA2 →	<table border="1"><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>								
IA1 →	<table border="1"><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>									IA1 →	<table border="1"><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>									IA1 →	<table border="1"><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>								
IA2 →	<table border="1"><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>									IA2 →	<table border="1"><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>									IA2 →	<table border="1"><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>								

Annexe - Exercice 2 - Partie B, question 2 et question 3. (b)

