Olympiades nationales de mathématiques 2022

Voie technologique

Académie de Nice

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie («exercices nationaux»). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie («exercices académiques»). Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercices académiques

Résolution en équipe

Les candidats traitent **les deux exercices**.

Exercice 1 : Bataille d'intelligences artificielles

Un informaticien programme deux intelligences artificielles que l'on désignera par IA1 et IA2.

Dans tout l'exercice, N désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Dans un tableau à 2 lignes et N colonnes, IA1 coche au hasard des cases sur la première ligne horizontale et IA2 coche, sans connaître le choix de IA1, des cases encore au hasard sur la deuxième ligne.

Si deux cases de la même colonne sont cochées alors IA2 a gagné et IA1 a perdu. Dans le cas contraire, IA1 a gagné et IA2 a perdu.

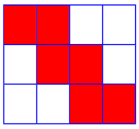
Les résultats pourront être justifiés en utilisant un tableau de deux lignes sur le modèle ci-contre. Dans cet exemple, $N = 4$, IA2 a gagné et IA1 a perdu.

IA1 $\rightarrow$	X	X		
IA2 $\rightarrow$	X			

Partie A - Les choix de IA1

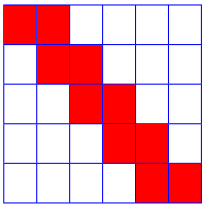
1. Sur sa ligne horizontale de N cases, IA1 coche **deux cases adjacentes** c'est-à-dire **l'une à côté de l'autre**.
   (a) Dans cette question, $N = 4$. Combien y a-t-il de possibilités pour cocher ces deux cases ?

   Pour $N = 4$, il y a 3 choix.

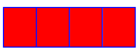
   (b) Dans cette question, $N = 6$. Combien y a-t-il de possibilités pour cocher ces deux cases ?

   Pour $N = 6$, il y a 5 choix.

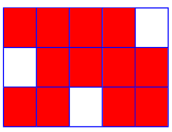
2. On note $D_1(N)$ le nombre de possibilités de cocher deux cases adjacentes.
   (a) Que vaut $D_1(2)$?
   $D_1(2) = 1$
   (b) Exprimer $D_1(N)$ en fonction de N. On acceptera la réponse sans démonstration.
   $D_1(N) = N - 1$

3. Dans cette question, N est un entier naturel supérieur ou égal à 4. Sur sa ligne horizontale de N cases, IA1 coche **deux cases adjacentes** puis, parmi les cases restantes, il coche de nouveau **deux cases adjacentes**. On note $D_2(N)$ le nombre de possibilités de cocher ainsi ces quatre cases.
   (a) Que vaut $D_2(4)$?
   $D_2(4) = 1$

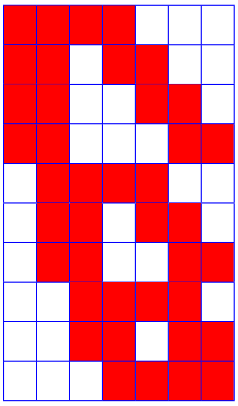
   (b) Justifier que $D_2(5) = 3$.

   $D_2(5) = 3$

(c) Que vaut $D_2(7)$?

$D_2(7) = 10$

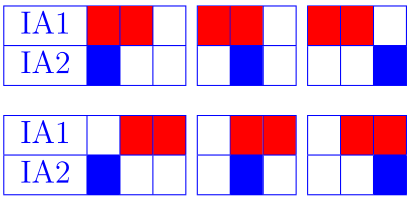


Partie B - Au tour de IA2

Désormais, on s'intéresse aux parties différentes possibles entre IA1 et IA2.

Situation 1 : IA1 coche au hasard **deux cases adjacentes** sur sa ligne et IA2 coche au hasard **une seule case** sur sa ligne.

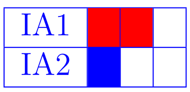
1. (a) Dans cette question, $N = 3$. Justifier que 6 parties différentes sont possibles.
   En déduire la probabilité que IA2 gagne dans ce cas.



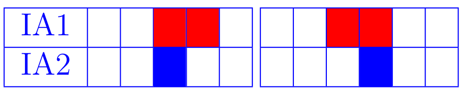
On a bien 6 parties possibles et la probabilité pour IA2 de gagner est $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

   (b) Dans cette question, $N = 4$. Sur l'annexe à rendre avec la copie, représenter toutes les parties différentes possibles. En déduire la probabilité que IA2 gagne.
   On a 12 parties possibles dont 6 gagnantes et la probabilité pour IA2 de gagner est $\frac{1}{2}$.

2. Désormais, N est un entier naturel supérieur ou égal à 4.
   (a) Justifier que $(N-1) \times N$ parties différentes sont possibles.
   IA1 a $D_1(N) = N - 1$ choix pour placer le paquet de deux et IA2 a N choix pour sa case , donc un total de $(N-1) \times N$ choix.
   (b) Quelle est la probabilité que IA2 gagne la partie si la case cochée par IA2 est dans la première colonne ?
   Si la case de IA2 est dans la première colonne, il a une seule partie gagnante pour lui : il faut que IA1 ait coché sa première colonne.



   La probabilité que IA2 gagne la partie si la case cochée par IA2 est dans la première colonne est donc égale à $\frac{1}{N-1}$
   (c) Quelle est la probabilité que IA2 gagne la partie ?
   Si la case n'est pas aux extrémités, il y a 2 parties gagnantes



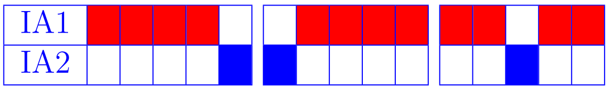
   On a donc $1 + 2 \times (N-2) + 1 = 2N - 2$ parties gagnantes.
   La probabilité pour IA2 de gagner est $\frac{2N-2}{N(N-1)} = \frac{2}{N}$.

Situation 2 : sur sa ligne, IA1 coche **deux cases adjacentes** puis, parmi les cases restantes, il coche de nouveau **deux cases adjacentes**. IA2 coche au hasard **une seule case** sur sa ligne.

3. Dans cette question, $N = 5$.

   (a) Justifier que 15 parties sont possibles.
   Pour $N = 5$ cases, IA1 a $D_2(5) = 3$ choix et IA1 a 5 choix donc il y a 15 parties possibles.

   (b) Montrer que la probabilité que IA2 gagne est $\dfrac{4}{5}$.

   Il n'y a que 3 parties perdantes pour IA2 : 

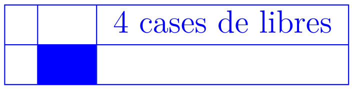
   Donc la probabilité que IA2 gagne est $1 - \frac{3}{12} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$.

4. Dans cette question, $N = 6$.

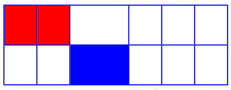
   (a) Combien y a-t-il de parties possibles ?
   Il y a $D_2(6) \times 6 = 36$ parties possibles.

   (b) Justifier que, si la case cochée par IA2 est dans la première colonne, il y a 3 parties perdantes pour IA2.
   Il faut que les cases cochées soient à droite donc il reste 5 cases et cela correspond à $D_2(5) = 3$ choix de IA1.

   (c) Montrer que, si la case cochée par IA2 n'est pas dans la première colonne, il y a encore 9 parties perdantes pour IA2.
   On retrouve 3 parties perdantes si la case est cochée tout à droite par symétrie.

   Pour la case 2 (et la case 5 par symétrie), 

   donc il y a $D_2(4) = 1$ partie perdante pour IA2.

   Pour la case 3 (et la case 4 par symétrie),  Les 2 premières cases doivent être cochées par IA1 donc il y a $D_1(3) = 2$ parties perdantes pour IA2.
   Donc, au total, il y a 3+1+1+2+2 =9 parties perdantes pour IA2.

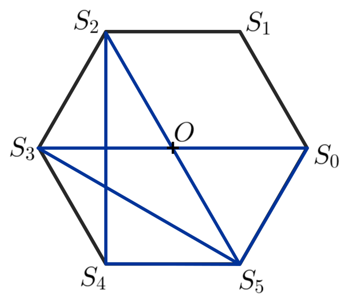
   (d) Qui de IA1 ou IA2 a le plus de chance de gagner ?
   Sur les $D_2(6) \times 6 = 36$ parties possibles, il y a 9+3=12 perdantes pour IA2 qui a donc seulement une chance sur 3 de perdre.

Exercice 2 : Triangles en couleurs

Dans tout l'exercice :

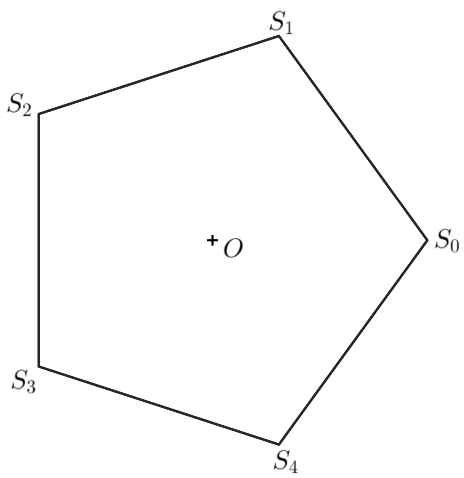
- N est un nombre entier supérieur ou égal à 3.
- a, b et c désignent des nombres entiers naturels vérifiant $0 \leqslant a < b < c \leqslant N-1$.
- P_N est un polygone régulier à N côtés dont les sommets sont successivement nommés S_0, S_1, ..., S_{N-1} et O son centre.
- $S_aS_bS_c$ est un triangle dont les sommets sont des sommets de P_N.
- Deux triangles sont « de la même famille » s'ils sont superposables.

Par exemple, dans le polygone régulier P_6 ci-contre, sont représentés les triangles $S_2S_4S_5$ et $S_0S_3S_5$. Les triangles $S_2S_4S_5$ et $S_0S_3S_5$ sont superposables : ils sont « de la même famille ».



Partie A : Étude géométrique de P_5

Dans cette partie, on considère $N = 5$. Pour chaque question, **aucune justification n'est attendue**.



1. Les triangles $S_1S_3S_4$ et $S_0S_2S_3$ sont-ils « de la même famille » ?
   Oui, le triangle $S_1S_3S_4$ est le triangle $S_0S_2S_3$ sont superposables.
2. Les triangles $S_1S_2S_3$ et $S_0S_2S_3$ sont-ils « de la même famille » ?
   Non, le triangle $S_1S_2S_3$ et le triangle $S_0S_2S_3$ ne sont pas superposables.
3. Citer les triangles « de la même famille » que $S_1S_3S_4$.
   Les triangles de la même famille que $S_1S_3S_4$ sont $S_0S_2S_4$, $S_0S_1S_3$, $S_1S_2S_4$, $S_0S_2S_3$.
4. (a) Combien de triangles peut-on tracer en reliant des sommets de P_5 ?
   On peut tracer $(5 \times 4 \times 3) \div 6 = 10$ triangles en reliant des sommets de P_5.

(b) On souhaite tracer ces triangles en respectant les règles suivantes :

- si deux triangles sont « de la même famille » alors ils sont tracés avec la même couleur ;
- si deux triangles ne sont pas « de la même famille » alors ils sont tracés avec des couleurs différentes.

Combien de couleurs faut-il utiliser pour tracer tous les triangles dont les sommets sont les sommets de P_5 ?

On utilise deux couleurs. Une pour le triangle $S_1S_2S_3$ et les triangles de la même famille. Une autre pour le triangle $S_0S_2S_3$ et les triangles de la même famille.

On rappelle que a, b et c désignent des nombres entiers naturels vérifiant $0 \leqslant a < b < c \leqslant N-1$.

Dans la suite de l'exercice, on considère la définition suivante.

Le nombre entier $T_{a,b,c}$, appelé N-triplangle, est défini par :

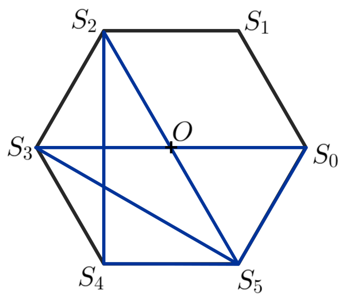
$$T_{a,b,c} = aN^2 + bN + c$$

On admet que :

- à tout triangle $S_aS_bS_c$ on associe l'unique N-triplangle $T_{a,b,c}$;
- réciproquement, tout N-triplangle $T_{a,b,c}$ est associé à un unique triangle $S_aS_bS_c$.

Par exemple, pour $N = 6$:

- le 6-triplangle associé au triangle $S_2S_4S_5$ est $T_{2,4,5} = 2 \times 6^2 + 4 \times 6 + 5 = 101$.
- le 6-triplangle associé au triangle $S_0S_3S_5$ est $T_{0,3,5} = 0 \times 6^2 + 3 \times 6 + 5 = 23$.



Partie B : Étude numérique de P_5

Dans cette partie, on considère $N = 5$.

1. Calculer le 5-triplangle $T_{1,2,3}$.
   $T_{1,2,3} = 1 \times 5^2 + 2 \times 5 + 3 = 38$
2. Quel 5-triplangle est associé au triangle de l'annexe 1 ?
   Le triangle $S_0S_2S_3$ est associé au triplangle $T_{0,2,3} = 0 \times 5^2 + 2 \times 5 + 3 = 13$.
3. (a) Quel triangle est associé au 5-triplangle 44 ?
   Comme 44 peut s'écrire sous la forme $a \times 5^2 + b \times 5 + c$ avec $a = 1$, $b = 3$ et $c = 4$, 44 est le 5-triplangle associé au triangle $S_1S_3S_4$.

   (b) Tracer ce triangle sur l'annexe 1 à rendre avec la copie.
   Tracer le triangle $S_1S_3S_4$.

   (c) Quelle est la nature de ce triangle ?
   P_5 est un polygone régulier, par conséquent tous ses angles sont égaux et tous ses côtés ont la même longueur. On en déduit que les triangles $S_1S_2S_3$ et $S_1S_0S_4$ sont égaux. Par conséquent, les côtés homologues $[S_1S_3]$ et $[S_1S_4]$ ont la même longueur. Le triangle $S_1S_3S_4$ est donc isocèle.

4. Le nombre 73 est-il un 5-triplangle ? Justifier.

   Par l'absurde, supposons qu'il existe trois nombres entiers a, b, c vérifiant $0 \leq a < b < c < 5$ et $73 = a \times 5^2 + b \times 5 + c$.

   Si $a < 2$, alors $-a \times 25 > -50$ et donc $73 - a \times 25 = b \times 5 + c > 23$. Or $b \times 5 + c$ est majoré par $3 \times 5 + 4 = 19$. Donc $b \times 5 + c$ ne peut être strictement supérieur à 23. Par conséquent, comme $0 \leq a < b < c < 5$, on en déduit que $a = 2$, $b = 3$ et $c = 4$.

   Or $2 \times 5^2 + 3 \times 5 + 4 = 69 \neq 73$, on aboutit donc à une contradiction.

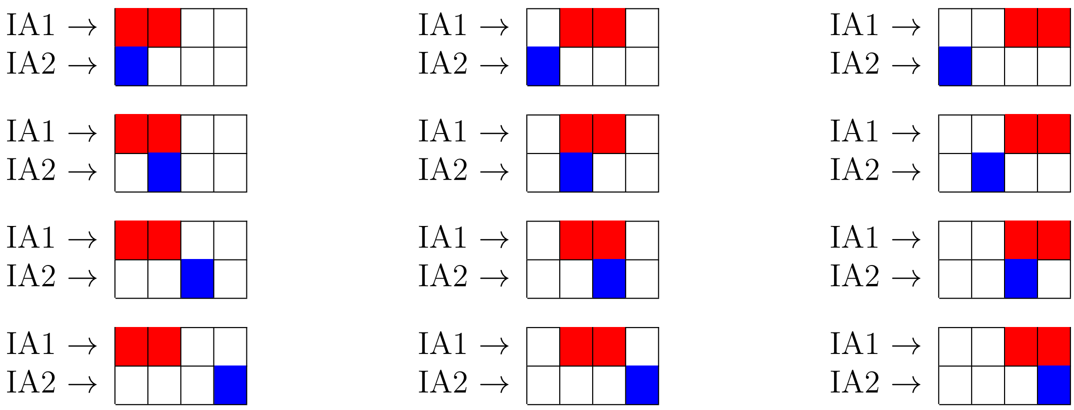
   Il n'existe pas trois nombres entiers a, b, c vérifiant $0 \leq a < b < c < 5$ et $73 = a \times 5^2 + b \times 5 + c$: le nombre 73 n'est pas un 5-triplangle.

5. Déterminer tous les 5-triplangles.

   L'ensemble des 5-triplangles est $\{7, 8, 9, 13, 14, 19, 38, 39, 44, 69\}$: il en existe 10. Ils sont associés aux 10 triangles que l'on peut tracer en reliant des sommets de P_5.

Annexes - À rendre avec la copie

Annexe - Exercice 1 - Partie B, question 1.(b)



Annexe - Exercice 2 - Partie B, question 2 et question 3. (b)