MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE LA JEUNESSE ET DES SPORTS
Liberté Égalité Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques 2022

Voie générale

ACADÉMIE DE NICE
Liberté Égalité Fraternité

Académie de Nice

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie («exercices nationaux»). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie («exercices académiques»). Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercices académiques

Résolution individuelle

Les candidats traitent **les deux exercices**.

Rappels pour les deux exercices du sujet

- Un **nombre premier** est un nombre entier naturel ayant exactement deux diviseurs positifs : 1 et lui-même.
- Les nombres premiers inférieurs ou égaux à 50 sont : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.
- 1 n'est pas un nombre premier.

Exercice 1 : Nombres cousins

Dans cet exercice, on donne la définition suivante.

Deux nombres premiers $a < b$ sont **cousins** si leur différence $b - a$ est égale à 4. On dit alors qu'ils forment un **couple de nombres cousins** que l'on notera (a, b).

Partie A : *Premières recherches*

1. Le nombre premier 2 admet-il un cousin ? Justifier.
2. Avec quels nombres premiers 7 est-il cousin ? Préciser les couples obtenus.
3. Déterminer tous les couples de nombres premiers cousins constitués d'entiers inférieurs à 50.

Partie B : *Nature des couples*

On rappelle que :

- la division euclidienne d'un entier naturel a par 6 s'écrit : $a = 6 \times q + r$ où q et r sont les uniques entiers tels que $0 \leqslant r < 6$;
- q est le quotient et r est le reste de cette division euclidienne.

1. Soit a un entier naturel supérieur ou égal à 5. Soit r le reste de la division euclidienne de a par 6.
   (a) Démontrer que si le reste r est égal à 0 ou 2 ou 3 ou 4, alors a n'est pas un nombre premier.
   (b) Démontrer que si le reste r est égal à 5, alors $a + 4$ n'est pas un nombre premier.
2. Démontrer alors que tous les couples d'entiers premiers cousins, excepté le couple $(3, 7)$, peuvent s'écrire sous la forme $(6q + 1, 6q + 5)$ où q désigne un entier naturel non nul.

Partie C : *Étude des nombres compris entre deux cousins*

Pour répondre aux questions suivantes, on pourra utiliser le résultat de la question B.2 même s'il n'a pas été démontré.

1. Montrer que si (a, b) est un couple de nombres premiers cousins autre que $(3, 7)$ alors la moyenne m de ces deux nombres, donnée par $m = \dfrac{a + b}{2}$, est un nombre entier qui n'est pas premier.
2. On considère (a, b) un couple de nombres premiers cousins autre que $(3, 7)$. Démontrer que tous les entiers qui sont strictement compris entre a et b ne sont pas premiers.
3. Est-il possible d'obtenir trois entiers a, b et c tels que les couples (a, b) et (b, c) soient des couples de nombres premiers cousins et tels que $5 \leqslant a < b < c$? Justifier la réponse.

Partie D : *Langage Python*

En langage Python, on rappelle que, si `n` désigne un entier naturel non nul :

- l'instruction `range(1,n+1)` correspond à la liste des entiers naturels compris entre 1 et `n` inclus ;
- `n % k` est le reste dans la division euclidienne de l'entier `n` par un entier naturel non nul `k` ;
- `a == b` renvoie `True` si `a` et `b` sont égaux, `False` sinon.

On considère la fonction **`mystère`** écrite en langage Python prenant pour argument, en entrée, un entier naturel **`n`** non nul :

```
def mystère(n):
    compteur = 0
    for k in range(1, n + 1):
        if n % k == 0:
            compteur = compteur + 1
    return compteur == 2
```

Voici un exemple d'utilisation de cette fonction :

```
>>> mystère(7)
True
>>> mystère(155)
False
```

1. Préciser le rôle de la fonction `mystère`.
2. On souhaite programmer une fonction `cousins(n)`, où `n` désigne un entier naturel non nul, qui renvoie le nombre de couples d'entiers premiers cousins (a, b) tels que $b \leqslant$ `n`. Par exemple, un résultat attendu est :

   ```
   >>> cousins(2022)
   65
   ```

   Recopier et compléter la fonction `cousins(n)` ci-dessous. On pourra utiliser la fonction `mystère` introduite à la question précédente.

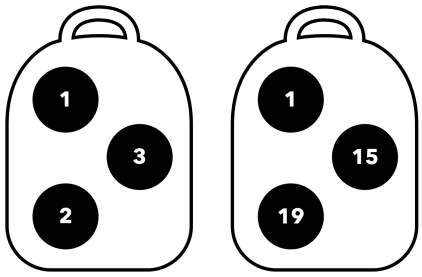
   ```
   def cousins(n):
       compteur = 0
       for a in range(...):
           if ... and ... :
               ...
       return compteur
   ```

À ce jour, il n'a pas été démontré qu'il existait une infinité de couples d'entiers premiers cousins malgré de fortes présomptions... Ce résultat a le statut actuel de conjecture.

Exercice 2 : Joli sac

Un sac contient plusieurs jetons, tous distincts. Sur chaque jeton est inscrit un nombre entier.
On convient de nommer « jeton n » le jeton sur lequel est écrit le nombre entier n.

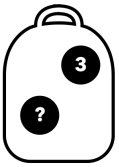
On dit que le sac est **joli** si, pour tous les couples de jetons du sac, la différence positive des nombres inscrits sur les jetons n'est pas un nombre premier.
On en déduit que le sac **n'est pas joli** s'il existe au moins un couple de jetons du sac dont la différence positive est un nombre premier.



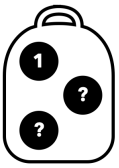
Le sac n'est pas joli. Le sac est joli.

Par exemple, le sac contenant les jetons 1, 2 et 3 « n'est pas joli » car $3 - 1 = 2$ et 2 est un nombre premier. En revanche, le sac contenant les jetons 1, 15 et 19 « est joli » car les différences positives sont $15 - 1 = 14$, $19 - 1 = 18$, $19 - 15 = 4$ et ni 14, ni 18, ni 4 ne sont des nombres premiers.

1. Dans cette question, on considère un sac contenant deux jetons : le jeton 3 et le jeton n.
   (a) Le sac est-il joli si $n = 2$?
   (b) Le sac est-il joli si $n = 5$?
   (c) Pour quelles valeurs de n, comprises entre 1 et 20 inclus, le sac est-il joli ?



2. Dans cette question, on considère un sac contenant trois jetons, dont le jeton 1. En choisissant deux autres jetons parmi les jetons 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et 10, donner un exemple de sac « joli ».



3. En justifiant les réponses, dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.
   (a) Il est possible de faire un sac joli avec trois nombres premiers.
   (b) Si un sac de trois jetons est joli, alors il n'est plus joli si on lui retire un de ses jetons.
   (c) La somme des jetons d'un sac joli à trois jetons peut être un nombre premier.
   (d) Il existe un sac joli contenant exactement 5 nombres premiers.

4. On utilise uniquement les jetons 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8.
   (a) Quels sont tous les sacs jolis de deux jetons que l'on peut constituer ?
   (b) Prouver que si un sac joli contient le jeton 2, alors il contient exactement deux jetons.
   (c) Prouver que si un sac joli ne contient pas le jeton 2, alors il contient exactement deux jetons.
   (d) Est-il possible de constituer un sac joli avec trois jetons ?

5. (a) On dispose des seize jetons 1, 2, 3, …, 16. Combien peut-on en choisir au maximum pour que le sac soit joli ?
   (b) On dispose des deux-mille-vingt-deux jetons 1, 2, 3, …, 2022. Combien peut-on en choisir au maximum pour que le sac soit joli ?