Olympiades nationales de mathématiques 2022

Voie générale

Académie de Nice

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie («exercices nationaux»). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie («exercices académiques»). Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercices académiques

Résolution individuelle

Les candidats traitent **les deux exercices**.

Rappels pour les deux exercices du sujet

- Un **nombre premier** est un nombre entier naturel ayant exactement deux diviseurs positifs : 1 et lui-même.
- Les nombres premiers inférieurs ou égaux à 50 sont : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.
- 1 n'est pas un nombre premier.

Exercice 1 : Nombres cousins

Dans cet exercice, on donne la définition suivante.

Deux nombres premiers $a < b$ sont **cousins** si leur différence $b - a$ est égale à 4. On dit alors qu'ils forment un **couple de nombres cousins** que l'on notera (a, b).

Partie A : *Premières recherches*

1. Le nombre premier 2 admet-il un cousin ? Justifier.

   Si 2 admet un cousin, alors c'est nécessairement $2 + 4 = 6$ qui n'est pas premier. 2 n'admet donc pas de cousin.

2. Avec quels nombres premiers 7 est-il cousin ? Préciser les couples obtenus.

   Soit un couple (a, b) de nombres premiers cousins où $a < b$.
   Si $a = 7$ alors on a nécessairement $b = 7 + 4 = 11$ qui est un nombre premier.
   Si $b = 7$ alors on a nécessairement $a = 7 - 4 = 3$ qui est un nombre premier.
   Ainsi 7 peut être cousin avec 3 et 11, on obtient alors les couples $(3, 7)$ et $(7, 11)$.

3. Déterminer tous les couples de nombres premiers cousins constitués d'entiers inférieurs à 50.

   Il y a 6 couples :
   $$(3, 7), (7, 11), (13, 17), (19, 23), (37, 41), (43, 47)$$

Partie B : *Nature des couples*
On rappelle que :

- la division euclidienne d'un entier naturel a par 6 s'écrit : $a = 6 \times q + r$ où q et r sont les uniques entiers tels que $0 \leqslant r < 6$;
- q est le quotient et r est le reste de cette division euclidienne.

1. Soit a un entier naturel supérieur ou égal à 5. Soit r le reste de la division euclidienne de a par 6.

   (a) Démontrer que si le reste r est égal à 0 ou 2 ou 3 ou 4, alors a n'est pas un nombre premier.

   Soit a un nombre entier tel que $a \geqslant 5$.
   Si r est dans $\{0, 2, 4\}$ alors $a = 2 \times 3 \times q + r$ est un nombre pair en tant que somme de deux nombres pairs. Hors il n'existe pas de nombre premier pair autre que 2, comme $a \geqslant 5$, a ne peut pas être premier.
   Si $r = 3$ alors $a = 3 \times (2q + 1)$ où $2q + 1$ est un nombre entier donc 3 divise a, ainsi a ne peut pas être un nombre premier.

(b) Démontrer que si le reste r est égal à 5, alors $a+4$ n'est pas un nombre premier.

Si $r=5$ alors on a $a=6q+5$ d'où $a+4=6q+9=3(2q+3)$ où $2q+3$ est un nombre entier. Ainsi 3 divise $a+4$ qui est un nombre entier supérieur ou égal à 4. On en déduit que $a+4$ n'est pas un nombre premier.

2. Démontrer alors que tous les couples d'entiers premiers cousins, excepté le couple $(3,7)$, peuvent s'écrire sous la forme $(6q+1, 6q+5)$ où q désigne un entier naturel non nul.

Excepté $(3,7)$, le plus petit couple de nombres premiers cousins est $(7,11)$. Ainsi si (a,b) est un couple de nombres premiers cousins autre que (3,7), on a $a \geqslant 7 \geqslant 5$. D'après la question précédente, comme a et $b=a+4$ sont des nombres premiers alors on a nécessairement $r=1$ d'où $a=6q+1$ et $b=a+4=6q+5$. De plus comme $a \geqslant 7$, on obtient $6q+1 \geqslant 7$ d'où $q \geqslant 1$ donc q est un entier naturel non nul.

Partie C : *Étude des nombres compris entre deux cousins*

Pour répondre aux questions suivantes, on pourra utiliser le résultat de la question B.2 même s'il n'a pas été démontré.

1. Montrer que si (a,b) est un couple de nombres premiers cousins autre que $(3,7)$ alors la moyenne m de ces deux nombres, donnée par $m=\dfrac{a+b}{2}$, est un nombre entier qui n'est pas premier.

D'après la partie précédente, il existe un entier naturel q non nul tel que $a=6q+1$ et $b=6q+5$. Comme $q \geq 1$, on a $a \geq 7$ et $m=a+2$ qui est supérieur ou égal à 9. Ainsi $m=\dfrac{a+b}{2}=6q+3=3(2q+1)$ est un nombre entier qui est toujours divisible par 3. Comme $m \neq 3$, on en déduit que m n'est pas premier.

2. On considère (a,b) un couple de nombres premiers cousins autre que $(3,7)$. Démontrer que tous les entiers qui sont strictement compris entre a et b ne sont pas premiers.

Il existe un entier naturel q non nul tel que $a=6q+1$ et $b=6q+5$. Comme $q \geq 1$, on a $a \geq 7$.

- $a+1=6q+2$ est divisible par 2 donc n'est pas premier ;
- $a+2=m$ n'est pas premier d'après la question précédente ;
- $a+3=6q+4$ est divisible par 2 donc n'est pas premier.

3. Est-il possible d'obtenir trois entiers a, b et c tels que les couples (a,b) et (b,c) soient des couples de nombres premiers cousins et tels que $5 \leqslant a < b < c$? Justifier la réponse.

On suppose que de tels entiers a, b et c existent.
D'après la question B.2, il existerait un entier naturel q non nul tel que $a=6q+1$ et $b=6q+5$. $c=b+4=6q+9=3(2q+3)$ serait donc divisible par 3 est ne serait donc pas premier (car $c > a \geqslant 7$)), ce qui est contraire à l'hypothèse selon laquelle c est premier.
De tels entiers n'existent donc pas.
Cependant (3,7) et (7,11) fonctionnent...

Partie D : *Langage Python*

En langage Python, on rappelle que, si `n` désigne un entier naturel non nul :

- l'instruction `range(1,n+1)` correspond à la liste des entiers naturels compris entre 1 et `n` inclus ;
- `n % k` est le reste dans la division euclidienne de l'entier `n` par un entier naturel non nul `k` ;
- `a == b` renvoie `True` si `a` et `b` sont égaux, `False` sinon.

On considère la fonction **`mystère`** écrite en langage Python prenant pour argument, en entrée, un entier naturel **`n`** non nul :

```
def mystère(n):
    compteur = 0
    for k in range(1, n + 1):
        if n % k == 0:
            compteur = compteur + 1
    return compteur == 2
```

Voici un exemple d'utilisation de cette fonction :

```
>>> mystère(7)
True
>>> mystère(155)
False
```

1. Préciser le rôle de la fonction `mystère`.

   Cette fonction retourne `True` si le nombre `n` est premier et `False` sinon.

2. On souhaite programmer une fonction `cousins(n)`, où `n` désigne un entier naturel non nul, qui renvoie le nombre de couples d'entiers premiers cousins (a, b) tels que $b \leqslant$ `n`. Par exemple, un résultat attendu est :

   ```
   >>> cousins(2022)
   65
   ```

   Recopier et compléter la fonction `cousins(n)` ci-dessous. On pourra utiliser la fonction `mystère` introduite à la question précédente.

   ```
   def cousins(n):
       compteur = 0
       for a in range(...):
           if ... and ... :
               ...
       return compteur
   ```

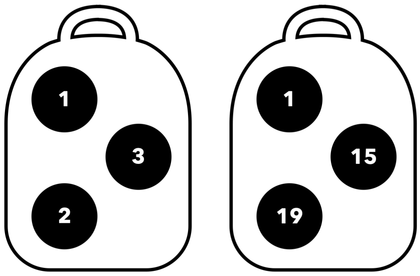
   ```
   def cousins(n):
       compteur = 0
       for a in range(2, n-3):
           if mystère(a) and mystère(a+4) :
               compteur = compteur + 1
       return compteur
   ```

À ce jour, il n'a pas été démontré qu'il existait une infinité de couples d'entiers premiers cousins malgré de fortes présomptions... Ce résultat a le statut actuel de conjecture.

Exercice 2 : Joli sac

Un sac contient plusieurs jetons, tous distincts. Sur chaque jeton est inscrit un nombre entier.
On convient de nommer « jeton n » le jeton sur lequel est écrit le nombre entier n.

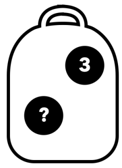
On dit que le sac est **joli** si, pour tous les couples de jetons du sac, la différence positive des nombres inscrits sur les jetons n'est pas un nombre premier.
On en déduit que le sac **n'est pas joli** s'il existe au moins un couple de jetons du sac dont la différence positive est un nombre premier.



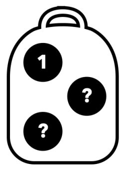
Le sac n'est pas joli. Le sac est joli.

Par exemple, le sac contenant les jetons 1, 2 et 3 « n'est pas joli » car $3 - 1 = 2$ et 2 est un nombre premier. En revanche, le sac contenant les jetons 1, 15 et 19 « est joli » car les différences positives sont $15 - 1 = 14$, $19 - 1 = 18$, $19 - 15 = 4$ et ni 14, ni 18, ni 4 ne sont des nombres premiers.

1. Dans cette question, on considère un sac contenant deux jetons : le jeton 3 et le jeton n.
   (a) Le sac est-il joli si $n = 2$?
   $3 - 2 = 1$ et 1 n'est pas un nombre premier donc le sac est joli.
   (b) Le sac est-il joli si $n = 5$?
   $5 - 3 = 2$ et 2 est un nombre premier donc le sac n'est pas joli.
   (c) Pour quelles valeurs de n, comprises entre 1 et 20 inclus, le sac est-il joli ?
   On peut utiliser les jetons 2, 4, 7, 9, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 19.



2. Dans cette question, on considère un sac contenant trois jetons, dont le jeton 1. En choisissant deux autres jetons parmi les jetons 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et 10, donner un exemple de sac « joli ».
   On peut former les sacs jolis :
   - 1, 2, 10
   - 1, 5, 9
   - 1, 9, 10
   - 2, 6, 10



3. En justifiant les réponses, dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.
   (a) Il est possible de faire un sac joli avec trois nombres premiers.

Vrai. Les sacs jolis possibles avec trois nombres premiers inférieurs à 50 sont (2,3,11) ; (2,3,17) ; (2,3,23) ; (2,3,29) ; (2,3,37) ; (2,3,41) ; (2,3,47) ; (2,11,17) ; (2,11,23) ; (2,11,29) ; (2,11,37) ; (2,11,41) ; (2,11,47) ; (2,17,23) ; (2,17,29) ; (2,17,37) ; (2,17,41) ; (2,17,47) ; (2,23,29) ; (2,23,37) ; (2,23,41) ; (2,23,47) ; (2,29,37) ; (2,29,41) ; (2,29,47) ; (2,37,41) ; (2,37,47) ; (2,41,47) ; (3,7,11) ; (3,7,13) ; (3,7,17) ; (3,7,19) ; (3,7,23) ; (3,7,29) ; (3,7,31) ; (3,7,37) ; (3,7,41) ; (3,7,43) ; (3,7,47) ; (3,11,17) ; (3,11,19) ; (3,11,23) ; (3,11,29) ; (3,11,31) ; (3,11,37) ; (3,11,41) ; (3,11,43) ; (3,11,47) ; (3,13,17) ; (3,13,19) ; (3,13,23) ; (3,13,29) ; (3,13,31) ; (3,13,37) ; (3,13,41) ; (3,13,43) ; (3,13,47) ; (3,17,23) ; (3,17,29) ; (3,17,31) ; (3,17,37) ; (3,17,41) ; (3,17,43) ; (3,17,47) ; (3,19,23) ; (3,19,29) ; (3,19,31) ; (3,19,37) ; (3,19,41) ; (3,19,43) ; (3,19,47) ; (3,23,29) ; (3,23,31) ; (3,23,37) ; (3,23,41) ; (3,23,43) ; (3,23,47) ; (3,29,37) ; (3,29,41) ; (3,29,43) ; (3,29,47) ; (3,31,37) ; (3,31,41) ; (3,31,43) ; (3,31,47) ; (3,37,41) ; (3,37,43) ; (3,37,47) ; (3,41,47) ; (3,43,47) ; (5,11,17) ; (5,11,19) ; (5,11,23) ; (5,11,29) ; (5,11,31) ; (5,11,37) ; (5,11,41) ; (5,11,43) ; (5,11,47) ; (5,13,17) ; (5,13,19) ; (5,13,23) ; (5,13,29) ; (5,13,31) ; (5,13,37) ; (5,13,41) ; (5,13,43) ; (5,13,47) ; (5,17,23) ; (5,17,29) ; (5,17,31) ; (5,17,37) ; (5,17,41) ; (5,17,43) ; (5,17,47) ; (5,19,23) ; (5,19,29) ; (5,19,31) ; (5,19,37) ; (5,19,41) ; (5,19,43) ; (5,19,47) ; (5,23,29) ; (5,23,31) ; (5,23,37) ; (5,23,41) ; (5,23,43) ; (5,23,47) ; (5,29,37) ; (5,29,41) ; (5,29,43) ; (5,29,47) ; (5,31,37) ; (5,31,41) ; (5,31,43) ; (5,31,47) ; (5,37,41) ; (5,37,43) ; (5,37,47) ; (5,41,47) ; (5,43,47) ; (7,11,17) ; (7,11,19) ; (7,11,23) ; (7,11,29) ; (7,11,31) ; (7,11,37) ; (7,11,41) ; (7,11,43) ; (7,11,47) ; (7,13,17) ; (7,13,19) ; (7,13,23) ; (7,13,29) ; (7,13,31) ; (7,13,37) ; (7,13,41) ; (7,13,43) ; (7,13,47) ; (7,17,23) ; (7,17,29) ; (7,17,31) ; (7,17,37) ; (7,17,41) ; (7,17,43) ; (7,17,47) ; (7,19,23) ; (7,19,29) ; (7,19,31) ; (7,19,37) ; (7,19,41) ; (7,19,43) ; (7,19,47) ; (7,23,29) ; (7,23,31) ; (7,23,37) ; (7,23,41) ; (7,23,43) ; (7,23,47) ; (7,29,37) ; (7,29,41) ; (7,29,43) ; (7,29,47) ; (7,31,37) ; (7,31,41) ; (7,31,43) ; (7,31,47) ; (7,37,41) ; (7,37,43) ; (7,37,47) ; (7,41,47) ; (7,43,47) ; (11,17,23) ; (11,17,29) ; (11,17,31) ; (11,17,37) ; (11,17,41) ; (11,17,43) ; (11,17,47) ; (11,19,23) ; (11,19,29) ; (11,19,31) ; (11,19,37) ; (11,19,41) ; (11,19,43) ; (11,19,47) ; (11,23,29) ; (11,23,31) ; (11,23,37) ; (11,23,41) ; (11,23,43) ; (11,23,47) ; (11,29,37) ; (11,29,41) ; (11,29,43) ; (11,29,47) ; (11,31,37) ; (11,31,41) ; (11,31,43) ; (11,31,47) ; (11,37,41) ; (11,37,43) ; (11,37,47) ; (11,41,47) ; (11,43,47) ; (13,17,23) ; (13,17,29) ; (13,17,31) ; (13,17,37) ; (13,17,41) ; (13,17,43) ; (13,17,47) ; (13,19,23) ; (13,19,29) ; (13,19,31) ; (13,19,37) ; (13,19,41) ; (13,19,43) ; (13,19,47) ; (13,23,29) ; (13,23,31) ; (13,23,37) ; (13,23,41) ; (13,23,43) ; (13,23,47) ; (13,29,37) ; (13,29,41) ; (13,29,43) ; (13,29,47) ; (13,31,37) ; (13,31,41) ; (13,31,43) ; (13,31,47) ; (13,37,41) ; (13,37,43) ; (13,37,47) ; (13,41,47) ; (13,43,47) ; (17,23,29) ; (17,23,31) ; (17,23,37) ; (17,23,41) ; (17,23,43) ; (17,23,47) ; (17,29,37) ; (17,29,41) ; (17,29,43) ; (17,29,47) ; (17,31,37) ; (17,31,41) ; (17,31,43) ; (17,31,47) ; (17,37,41) ; (17,37,43) ; (17,37,47) ; (17,41,47) ; (17,43,47) ; (19,23,29) ; (19,23,31) ; (19,23,37) ; (19,23,41) ; (19,23,43) ; (19,23,47) ; (19,29,37) ; (19,29,41) ; (19,29,43) ; (19,29,47) ; (19,31,37) ; (19,31,41) ; (19,31,43) ; (19,31,47) ; (19,37,41) ; (19,37,43) ; (19,37,47) ; (19,41,47) ; (19,43,47) ; (23,29,37) ; (23,29,41) ; (23,29,43) ; (23,29,47) ; (23,31,37) ; (23,31,41) ; (23,31,43) ; (23,31,47) ; (23,37,41) ; (23,37,43) ; (23,37,47) ; (23,41,47) ; (23,43,47) ; (29,37,41) ; (29,37,43) ; (29,37,47) ; (29,41,47) ; (29,43,47) ; (31,37,41) ; (31,37,43) ; (31,37,47) ; (31,41,47) ; (31,43,47) ; (37,41,47) ; (37,43,47).

(b) Si un sac de trois jetons est joli, alors il n'est plus joli si on lui retire un de ses jetons.
Faux. Les différences positives des jetons qui restent dans le sac ne sont pas des nombres premiers.

(c) La somme des jetons d'un sac joli à trois jetons peut être un nombre premier.
Vrai. Les sacs jolis possibles avec trois jetons dont la somme est un nombre premier inférieur à 50 sont (1,2,10) ; (1,2,16) ; (1,2,26) ; (1,2,28) ; (1,2,34) ; (1,2,40) ; (1,5,11) ; (1,5,13) ; (1,5,17) ; (1,5,23) ; (1,5,25) ; (1,5,31) ; (1,5,35) ; (1,5,37) ; (1,5,41) ; (1,7,11) ; (1,7,15) ; (1,7,21) ; (1,7,23) ; (1,7,29) ; (1,7,33) ; (1,7,35) ; (1,7,39) ; (1,9,13) ; (1,9,19) ; (1,9,21) ; (1,9,27) ; (1,9,31) ; (1,9,33) ; (1,9,37) ; (1,10,26) ; (1,10,36) ; (1,11,17) ; (1,11,19) ; (1,11,25) ; (1,11,29) ; (1,11,31) ; (1,11,35) ; (1,13,17) ; (1,13,23) ; (1,13,27) ; (1,13,29) ; (1,13,33) ; (1,15,21) ; (1,15,25) ; (1,15,27) ; (1,15,31) ; (1,16,26) ; (1,17,23) ; (1,17,25) ; (1,17,29) ; (1,19,23) ; (1,19,27) ; (1,21,25) ; (2,3,12) ; (2,3,18) ; (2,3,24) ; (2,3,36) ; (2,3,38) ; (2,3,42) ; (2,10,11) ; (2,10,35) ; (2,12,27) ; (2,17,18) ; (2,18,27) ;

(2,22,23) ; (3,4,12) ; (3,4,24) ; (3,4,30) ; (3,4,36) ; (3,7,13) ; (3,7,19) ; (3,7,21) ; (3,7,27) ; (3,7,31) ; (3,7,33) ; (3,7,37) ; (3,9,17) ; (3,9,19) ; (3,9,25) ; (3,9,29) ; (3,9,31) ; (3,9,35) ; (3,11,15) ; (3,11,17) ; (3,11,23) ; (3,11,27) ; (3,11,29) ; (3,11,33) ; (3,12,28) ; (3,13,21) ; (3,13,25) ; (3,13,27) ; (3,13,31) ; (3,15,19) ; (3,15,23) ; (3,15,25) ; (3,15,29) ; (3,17,21) ; (3,17,23) ; (3,17,27) ; (3,19,25) ; (4,5,14) ; (4,5,20) ; (4,5,32) ; (4,5,38) ; (4,8,29) ; (4,12,13) ; (4,13,14) ; (4,14,29) ; (4,18,19) ; (4,19,20) ; (5,6,20) ; (5,6,26) ; (5,6,30) ; (5,6,32) ; (5,9,15) ; (5,9,17) ; (5,9,23) ; (5,9,27) ; (5,9,29) ; (5,9,33) ; (5,11,15) ; (5,11,21) ; (5,11,25) ; (5,11,27) ; (5,11,31) ; (5,13,19) ; (5,13,23) ; (5,13,25) ; (5,13,29) ; (5,15,21) ; (5,15,23) ; (5,15,27) ; (5,17,21) ; (5,17,25) ; (5,19,23) ; (6,7,16) ; (6,7,28) ; (6,7,34) ; (6,10,31) ; (6,15,16) ; (6,20,21) ; (7,8,16) ; (7,8,22) ; (7,8,28) ; (7,8,32) ; (7,11,19) ; (7,11,23) ; (7,11,25) ; (7,11,29) ; (7,13,17) ; (7,13,21) ; (7,13,23) ; (7,13,27) ; (7,15,19) ; (7,15,21) ; (7,15,25) ; (7,17,23) ; (8,9,24) ; (8,9,30) ; (8,16,17) ; (8,17,18) ; (9,10,18) ; (9,10,24) ; (9,13,19) ; (9,13,21) ; (9,13,25) ; (9,15,19) ; (9,15,23) ; (9,17,21) ; (10,11,20) ; (10,11,26) ; (10,18,19) ; (11,12,20) ; (11,15,21) ; (12,13,22).

(d) Il existe un sac joli contenant exactement 5 nombres premiers.

Vrai. Les sacs jolis contenant exactement 5 nombres premiers inférieurs à 50 sont :

(2,11,17,23,29) ; (2,11,17,23,37) ; (2,11,17,23,41) ; (2,11,17,23,47) ; (2,11,17,29,37) ; (2,11,17,29,41) ; (2,11,17,29,47) ; (2,11,17,37,41) ; (2,11,17,37,47) ; (2,11,17,41,47) ; (2,11,23,29,37) ; (2,11,23,29,41) ; (2,11,23,29,47) ; (2,11,23,37,41) ; (2,11,23,37,47) ; (2,11,23,41,47) ; (2,11,29,37,41) ; (2,11,29,37,47) ; (2,11,29,41,47) ; (2,11,37,41,47) ; (2,17,23,29,37) ; (2,17,23,29,41) ; (2,17,23,29,47) ; (2,17,23,37,41) ; (2,17,23,37,47) ; (2,17,23,41,47) ; (2,17,29,37,41) ; (2,17,29,37,47) ; (2,17,29,41,47) ; (2,17,37,41,47) ; (2,23,29,37,41) ; (2,23,29,37,47) ; (2,23,29,41,47) ; (2,23,37,41,47) ; (2,29,37,41,47) ;
(2,3,11,17,23) ; (2,3,11,17,29) ; (2,3,11,17,37) ; (2,3,11,17,41) ; (2,3,11,17,47) ; (2,3,11,23,29) ; (2,3,11,23,37) ; (2,3,11,23,41) ; (2,3,11,23,47) ; (2,3,11,29,37) ; (2,3,11,29,41) ; (2,3,11,29,47) ; (2,3,11,37,41) ; (2,3,11,37,47) ; (2,3,11,41,47) ; (2,3,17,23,29) ; (2,3,17,23,37) ; (2,3,17,23,41) ; (2,3,17,23,47) ; (2,3,17,29,37) ; (2,3,17,29,41) ; (2,3,17,29,47) ; (2,3,17,37,41) ; (2,3,17,37,47) ; (2,3,17,41,47) ; (2,3,23,29,37) ; (2,3,23,29,41) ; (2,3,23,29,47) ; (2,3,23,37,41) ; (2,3,23,37,47) ; (2,3,23,41,47) ; (2,3,29,37,41) ; (2,3,29,37,47) ; (2,3,29,41,47) ; (2,3,37,41,47) ;
(23,29,37,41,47) ; (23,29,37,43,47) ; (23,31,37,41,47) ; (23,31,37,43,47) ; (3,11,17,23,29) ; (3,11,17,23,31) ; (3,11,17,23,37) ; (3,11,17,23,41) ; (3,11,17,23,43) ; (3,11,17,23,47) ; (3,11,17,29,37) ; (3,11,17,29,41) ; (3,11,17,29,43) ; (3,11,17,29,47) ; (3,11,17,31,37) ; (3,11,17,31,41) ; (3,11,17,31,43) ; (3,11,17,31,47) ; (3,11,17,37,41) ; (3,11,17,37,43) ; (3,11,17,37,47) ; (3,11,17,41,47) ; (3,11,17,43,47) ; (3,11,19,23,29) ; (3,11,19,23,31) ; (3,11,19,23,37) ; (3,11,19,23,41) ; (3,11,19,23,43) ; (3,11,19,23,47) ; (3,11,19,29,37) ; (3,11,19,29,41) ; (3,11,19,29,43) ; (3,11,19,29,47) ; (3,11,19,31,37) ; (3,11,19,31,41) ; (3,11,19,31,43) ; (3,11,19,31,47) ; (3,11,19,37,41) ; (3,11,19,37,43) ; (3,11,19,37,47) ; (3,11,19,41,47) ; (3,11,19,43,47) ; (3,11,23,29,37) ; (3,11,23,29,41) ; (3,11,23,29,43) ; (3,11,23,29,47) ; (3,11,23,31,37) ; (3,11,23,31,41) ; (3,11,23,31,43) ; (3,11,23,31,47) ; (3,11,23,37,41) ; (3,11,23,37,43) ; (3,11,23,37,47) ; (3,11,23,41,47) ; (3,11,23,43,47) ; (3,11,29,37,41) ; (3,11,29,37,43) ; (3,11,29,37,47) ; (3,11,29,41,47) ; (3,11,29,43,47) ; (3,11,31,37,41) ; (3,11,31,37,43) ; (3,11,31,37,47) ; (3,11,31,41,47) ; (3,11,31,43,47) ; (3,11,37,41,47) ; (3,11,37,43,47) ; (3,13,17,23,29) ; (3,13,17,23,31) ; (3,13,17,23,37) ; (3,13,17,23,41) ; (3,13,17,23,43) ; (3,13,17,23,47) ; (3,13,17,29,37) ; (3,13,17,29,41) ; (3,13,17,29,43) ; (3,13,17,29,47) ; (3,13,17,31,37) ; (3,13,17,31,41) ; (3,13,17,31,43) ; (3,13,17,31,47) ; (3,13,17,37,41) ; (3,13,17,37,43) ; (3,13,17,37,47) ; (3,13,17,41,47) ; (3,13,17,43,47) ; (3,13,19,23,29) ; (3,13,19,23,31) ; (3,13,19,23,37) ; (3,13,19,23,41) ; (3,13,19,23,43) ; (3,13,19,23,47) ; (3,13,19,29,37) ; (3,13,19,29,41) ; (3,13,19,29,43) ; (3,13,19,29,47) ; (3,13,19,31,37) ; (3,13,19,31,41) ; (3,13,19,31,43) ; (3,13,19,31,47) ; (3,13,19,37,41) ; (3,13,19,37,43) ; (3,13,19,37,47) ; (3,13,19,41,47) ; (3,13,19,43,47) ; (3,13,23,29,37) ; (3,13,23,29,41) ; (3,13,23,29,43) ; (3,13,23,29,47) ; (3,13,23,31,37) ; (3,13,23,31,41) ; (3,13,23,31,43) ; (3,13,23,31,47) ; (3,13,23,37,41) ; (3,13,23,37,43) ;

(3,13,23,37,47) ; (3,13,23,41,47) ; (3,13,23,43,47) ; (3,13,29,37,41) ; (3,13,29,37,43) ;
(3,13,29,37,47) ; (3,13,29,41,47) ; (3,13,29,43,47) ; (3,13,31,37,41) ; (3,13,31,37,43) ;
(3,13,31,37,47) ; (3,13,31,41,47) ; (3,13,31,43,47) ; (3,13,37,41,47) ; (3,13,37,43,47) ;
(3,17,23,29,37) ; (3,17,23,29,41) ; (3,17,23,29,43) ; (3,17,23,29,47) ; (3,17,23,31,37) ;
(3,17,23,31,41) ; (3,17,23,31,43) ; (3,17,23,31,47) ; (3,17,23,37,41) ; (3,17,23,37,43) ;
(3,17,23,37,47) ; (3,17,23,41,47) ; (3,17,23,43,47) ; (3,17,29,37,41) ; (3,17,29,37,43) ;
(3,17,29,37,47) ; (3,17,29,41,47) ; (3,17,29,43,47) ; (3,17,31,37,41) ; (3,17,31,37,43) ;
(3,17,31,37,47) ; (3,17,31,41,47) ; (3,17,31,43,47) ; (3,17,37,41,47) ; (3,17,37,43,47) ;
(3,19,23,29,37) ; (3,19,23,29,41) ; (3,19,23,29,43) ; (3,19,23,29,47) ; (3,19,23,31,37) ;
(3,19,23,31,41) ; (3,19,23,31,43) ; (3,19,23,31,47) ; (3,19,23,37,41) ; (3,19,23,37,43) ;
(3,19,23,37,47) ; (3,19,23,41,47) ; (3,19,23,43,47) ; (3,19,29,37,41) ; (3,19,29,37,43) ;
(3,19,29,37,47) ; (3,19,29,41,47) ; (3,19,29,43,47) ; (3,19,31,37,41) ; (3,19,31,37,43) ;
(3,19,31,37,47) ; (3,19,31,41,47) ; (3,19,31,43,47) ; (3,19,37,41,47) ; (3,19,37,43,47) ;
(3,23,29,37,41) ; (3,23,29,37,43) ; (3,23,29,37,47) ; (3,23,29,41,47) ; (3,23,29,43,47) ;
(3,23,31,37,41) ; (3,23,31,37,43) ; (3,23,31,37,47) ; (3,23,31,41,47) ; (3,23,31,43,47) ;
(3,23,37,41,47) ; (3,23,37,43,47) ; (3,29,37,41,47) ; (3,29,37,43,47) ; (3,31,37,41,47) ;
(3,31,37,43,47) ; (3,7,11,17,23) ; (3,7,11,17,29) ; (3,7,11,17,31) ; (3,7,11,17,37) ;
(3,7,11,17,41) ; (3,7,11,17,43) ; (3,7,11,17,47) ; (3,7,11,19,23) ; (3,7,11,19,29) ; (3,7,11,19,31) ;
(3,7,11,19,37) ; (3,7,11,19,41) ; (3,7,11,19,43) ; (3,7,11,19,47) ; (3,7,11,23,29) ; (3,7,11,23,31) ;
(3,7,11,23,37) ; (3,7,11,23,41) ; (3,7,11,23,43) ; (3,7,11,23,47) ; (3,7,11,29,37) ; (3,7,11,29,41) ;
(3,7,11,29,43) ; (3,7,11,29,47) ; (3,7,11,31,37) ; (3,7,11,31,41) ; (3,7,11,31,43) ; (3,7,11,31,47) ;
(3,7,11,37,41) ; (3,7,11,37,43) ; (3,7,11,37,47) ; (3,7,11,41,47) ; (3,7,11,43,47) ; (3,7,13,17,23) ;
(3,7,13,17,29) ; (3,7,13,17,31) ; (3,7,13,17,37) ; (3,7,13,17,41) ; (3,7,13,17,43) ; (3,7,13,17,47) ;
(3,7,13,19,23) ; (3,7,13,19,29) ; (3,7,13,19,31) ; (3,7,13,19,37) ; (3,7,13,19,41) ; (3,7,13,19,43) ;
(3,7,13,19,47) ; (3,7,13,23,29) ; (3,7,13,23,31) ; (3,7,13,23,37) ; (3,7,13,23,41) ; (3,7,13,23,43) ;
(3,7,13,23,47) ; (3,7,13,29,37) ; (3,7,13,29,41) ; (3,7,13,29,43) ; (3,7,13,29,47) ; (3,7,13,31,37) ;
(3,7,13,31,41) ; (3,7,13,31,43) ; (3,7,13,31,47) ; (3,7,13,37,41) ; (3,7,13,37,43) ; (3,7,13,37,47) ;
(3,7,13,41,47) ; (3,7,13,43,47) ; (3,7,17,23,29) ; (3,7,17,23,31) ; (3,7,17,23,37) ; (3,7,17,23,41) ;
(3,7,17,23,43) ; (3,7,17,23,47) ; (3,7,17,29,37) ; (3,7,17,29,41) ; (3,7,17,29,43) ; (3,7,17,29,47) ;
(3,7,17,31,37) ; (3,7,17,31,41) ; (3,7,17,31,43) ; (3,7,17,31,47) ; (3,7,17,37,41) ; (3,7,17,37,43) ;
(3,7,17,37,47) ; (3,7,17,41,47) ; (3,7,17,43,47) ; (3,7,19,23,29) ; (3,7,19,23,31) ; (3,7,19,23,37) ;
(3,7,19,23,41) ; (3,7,19,23,43) ; (3,7,19,23,47) ; (3,7,19,29,37) ; (3,7,19,29,41) ; (3,7,19,29,43) ;
(3,7,19,29,47) ; (3,7,19,31,37) ; (3,7,19,31,41) ; (3,7,19,31,43) ; (3,7,19,31,47) ; (3,7,19,37,41) ;
(3,7,19,37,43) ; (3,7,19,37,47) ; (3,7,19,41,47) ; (3,7,19,43,47) ; (3,7,23,29,37) ; (3,7,23,29,41) ;
(3,7,23,29,43) ; (3,7,23,29,47) ; (3,7,23,31,37) ; (3,7,23,31,41) ; (3,7,23,31,43) ; (3,7,23,31,47) ;
(3,7,23,37,41) ; (3,7,23,37,43) ; (3,7,23,37,47) ; (3,7,23,41,47) ; (3,7,23,43,47) ; (3,7,29,37,41) ;
(3,7,29,37,43) ; (3,7,29,37,47) ; (3,7,29,41,47) ; (3,7,29,43,47) ; (3,7,31,37,41) ; (3,7,31,37,43) ;
(3,7,31,37,47) ; (3,7,31,41,47) ; (3,7,31,43,47) ; (3,7,37,41,47) ; (3,7,37,43,47) ;
(5,11,17,23,29) ; (5,11,17,23,31) ; (5,11,17,23,37) ; (5,11,17,23,41) ; (5,11,17,23,43) ;
(5,11,17,23,47) ; (5,11,17,29,37) ; (5,11,17,29,41) ; (5,11,17,29,43) ; (5,11,17,29,47) ;
(5,11,17,31,37) ; (5,11,17,31,41) ; (5,11,17,31,43) ; (5,11,17,31,47) ; (5,11,17,37,41) ;
(5,11,17,37,43) ; (5,11,17,37,47) ; (5,11,17,41,47) ; (5,11,17,43,47) ; (5,11,19,23,29) ;
(5,11,19,23,31) ; (5,11,19,23,37) ; (5,11,19,23,41) ; (5,11,19,23,43) ; (5,11,19,23,47) ;
(5,11,19,29,37) ; (5,11,19,29,41) ; (5,11,19,29,43) ; (5,11,19,29,47) ; (5,11,19,31,37) ;
(5,11,19,31,41) ; (5,11,19,31,43) ; (5,11,19,31,47) ; (5,11,19,37,41) ; (5,11,19,37,43) ;
(5,11,19,37,47) ; (5,11,19,41,47) ; (5,11,19,43,47) ; (5,11,23,29,37) ; (5,11,23,29,41) ;
(5,11,23,29,43) ; (5,11,23,29,47) ; (5,11,23,31,37) ; (5,11,23,31,41) ; (5,11,23,31,43) ;
(5,11,23,31,47) ; (5,11,23,37,41) ; (5,11,23,37,43) ; (5,11,23,37,47) ; (5,11,23,41,47) ;
(5,11,23,43,47) ; (5,11,29,37,41) ; (5,11,29,37,43) ; (5,11,29,37,47) ; (5,11,29,41,47) ;
(5,11,29,43,47) ; (5,11,31,37,41) ; (5,11,31,37,43) ; (5,11,31,37,47) ; (5,11,31,41,47) ;
(5,11,31,43,47) ; (5,11,37,41,47) ; (5,11,37,43,47) ; (5,13,17,23,29) ; (5,13,17,23,31) ;

(5,13,17,23,37) ; (5,13,17,23,41) ; (5,13,17,23,43) ; (5,13,17,23,47) ; (5,13,17,29,37) ;
(5,13,17,29,41) ; (5,13,17,29,43) ; (5,13,17,29,47) ; (5,13,17,31,37) ; (5,13,17,31,41) ;
(5,13,17,31,43) ; (5,13,17,31,47) ; (5,13,17,37,41) ; (5,13,17,37,43) ; (5,13,17,37,47) ;
(5,13,17,41,47) ; (5,13,17,43,47) ; (5,13,19,23,29) ; (5,13,19,23,31) ; (5,13,19,23,37) ;
(5,13,19,23,41) ; (5,13,19,23,43) ; (5,13,19,23,47) ; (5,13,19,29,37) ; (5,13,19,29,41) ;
(5,13,19,29,43) ; (5,13,19,29,47) ; (5,13,19,31,37) ; (5,13,19,31,41) ; (5,13,19,31,43) ;
(5,13,19,31,47) ; (5,13,19,37,41) ; (5,13,19,37,43) ; (5,13,19,37,47) ; (5,13,19,41,47) ;
(5,13,19,43,47) ; (5,13,23,29,37) ; (5,13,23,29,41) ; (5,13,23,29,43) ; (5,13,23,29,47) ;
(5,13,23,31,37) ; (5,13,23,31,41) ; (5,13,23,31,43) ; (5,13,23,31,47) ; (5,13,23,37,41) ;
(5,13,23,37,43) ; (5,13,23,37,47) ; (5,13,23,41,47) ; (5,13,23,43,47) ; (5,13,29,37,41) ;
(5,13,29,37,43) ; (5,13,29,37,47) ; (5,13,29,41,47) ; (5,13,29,43,47) ; (5,13,31,37,41) ;
(5,13,31,37,43) ; (5,13,31,37,47) ; (5,13,31,41,47) ; (5,13,31,43,47) ; (5,13,37,41,47) ;
(5,13,37,43,47) ; (5,17,23,29,37) ; (5,17,23,29,41) ; (5,17,23,29,43) ; (5,17,23,29,47) ;
(5,17,23,31,37) ; (5,17,23,31,41) ; (5,17,23,31,43) ; (5,17,23,31,47) ; (5,17,23,37,41) ;
(5,17,23,37,43) ; (5,17,23,37,47) ; (5,17,23,41,47) ; (5,17,23,43,47) ; (5,17,29,37,41) ;
(5,17,29,37,43) ; (5,17,29,37,47) ; (5,17,29,41,47) ; (5,17,29,43,47) ; (5,17,31,37,41) ;
(5,17,31,37,43) ; (5,17,31,37,47) ; (5,17,31,41,47) ; (5,17,31,43,47) ; (5,17,37,41,47) ;
(5,17,37,43,47) ; (5,19,23,29,37) ; (5,19,23,29,41) ; (5,19,23,29,43) ; (5,19,23,29,47) ;
(5,19,23,31,37) ; (5,19,23,31,41) ; (5,19,23,31,43) ; (5,19,23,31,47) ; (5,19,23,37,41) ;
(5,19,23,37,43) ; (5,19,23,37,47) ; (5,19,23,41,47) ; (5,19,23,43,47) ; (5,19,29,37,41) ;
(5,19,29,37,43) ; (5,19,29,37,47) ; (5,19,29,41,47) ; (5,19,29,43,47) ; (5,19,31,37,41) ;
(5,19,31,37,43) ; (5,19,31,37,47) ; (5,19,31,41,47) ; (5,19,31,43,47) ; (5,19,37,41,47) ;
(5,19,37,43,47) ; (5,23,29,37,41) ; (5,23,29,37,43) ; (5,23,29,37,47) ; (5,23,29,41,47) ;
(5,23,29,43,47) ; (5,23,31,37,41) ; (5,23,31,37,43) ; (5,23,31,37,47) ; (5,23,31,41,47) ;
(5,23,31,43,47) ; (5,23,37,41,47) ; (5,23,37,43,47) ; (5,29,37,41,47) ; (5,29,37,43,47) ;
(5,31,37,41,47) ; (5,31,37,43,47) ; (7,11,17,23,29) ; (7,11,17,23,31) ; (7,11,17,23,37) ;
(7,11,17,23,41) ; (7,11,17,23,43) ; (7,11,17,23,47) ; (7,11,17,29,37) ; (7,11,17,29,41) ;
(7,11,17,29,43) ; (7,11,17,29,47) ; (7,11,17,31,37) ; (7,11,17,31,41) ; (7,11,17,31,43) ;
(7,11,17,31,47) ; (7,11,17,37,41) ; (7,11,17,37,43) ; (7,11,17,37,47) ; (7,11,17,41,47) ;
(7,11,17,43,47) ; (7,11,19,23,29) ; (7,11,19,23,31) ; (7,11,19,23,37) ; (7,11,19,23,41) ;
(7,11,19,23,43) ; (7,11,19,23,47) ; (7,11,19,29,37) ; (7,11,19,29,41) ; (7,11,19,29,43) ;
(7,11,19,29,47) ; (7,11,19,31,37) ; (7,11,19,31,41) ; (7,11,19,31,43) ; (7,11,19,31,47) ;
(7,11,19,37,41) ; (7,11,19,37,43) ; (7,11,19,37,47) ; (7,11,19,41,47) ; (7,11,19,43,47) ;
(7,11,23,29,37) ; (7,11,23,29,41) ; (7,11,23,29,43) ; (7,11,23,29,47) ; (7,11,23,31,37) ;
(7,11,23,31,41) ; (7,11,23,31,43) ; (7,11,23,31,47) ; (7,11,23,37,41) ; (7,11,23,37,43) ;
(7,11,23,37,47) ; (7,11,23,41,47) ; (7,11,23,43,47) ; (7,11,29,37,41) ; (7,11,29,37,43) ;
(7,11,29,37,47) ; (7,11,29,41,47) ; (7,11,29,43,47) ; (7,11,31,37,41) ; (7,11,31,37,43) ;
(7,11,31,37,47) ; (7,11,31,41,47) ; (7,11,31,43,47) ; (7,11,37,41,47) ; (7,11,37,43,47) ;
(7,13,17,23,29) ; (7,13,17,23,31) ; (7,13,17,23,37) ; (7,13,17,23,41) ; (7,13,17,23,43) ;
(7,13,17,23,47) ; (7,13,17,29,37) ; (7,13,17,29,41) ; (7,13,17,29,43) ; (7,13,17,29,47) ;
(7,13,17,31,37) ; (7,13,17,31,41) ; (7,13,17,31,43) ; (7,13,17,31,47) ; (7,13,17,37,41) ;
(7,13,17,37,43) ; (7,13,17,37,47) ; (7,13,17,41,47) ; (7,13,17,43,47) ; (7,13,19,23,29) ;
(7,13,19,23,31) ; (7,13,19,23,37) ; (7,13,19,23,41) ; (7,13,19,23,43) ; (7,13,19,23,47) ;
(7,13,19,29,37) ; (7,13,19,29,41) ; (7,13,19,29,43) ; (7,13,19,29,47) ; (7,13,19,31,37) ;
(7,13,19,31,41) ; (7,13,19,31,43) ; (7,13,19,31,47) ; (7,13,19,37,41) ; (7,13,19,37,43) ;
(7,13,19,37,47) ; (7,13,19,41,47) ; (7,13,19,43,47) ; (7,13,23,29,37) ; (7,13,23,29,41) ;
(7,13,23,29,43) ; (7,13,23,29,47) ; (7,13,23,31,37) ; (7,13,23,31,41) ; (7,13,23,31,43) ;
(7,13,23,31,47) ; (7,13,23,37,41) ; (7,13,23,37,43) ; (7,13,23,37,47) ; (7,13,23,41,47) ;
(7,13,23,43,47) ; (7,13,29,37,41) ; (7,13,29,37,43) ; (7,13,29,37,47) ; (7,13,29,41,47) ;
(7,13,29,43,47) ; (7,13,31,37,41) ; (7,13,31,37,43) ; (7,13,31,37,47) ; (7,13,31,41,47) ;
(7,13,31,43,47) ; (7,13,37,41,47) ; (7,13,37,43,47) ; (7,17,23,29,37) ; (7,17,23,29,41) ;

(7,17,23,29,43) ; (7,17,23,29,47) ; (7,17,23,31,37) ; (7,17,23,31,41) ; (7,17,23,31,43) ; (7,17,23,31,47) ; (7,17,23,37,41) ; (7,17,23,37,43) ; (7,17,23,37,47) ; (7,17,23,41,47) ; (7,17,23,43,47) ; (7,17,29,37,41) ; (7,17,29,37,43) ; (7,17,29,37,47) ; (7,17,29,41,47) ; (7,17,29,43,47) ; (7,17,31,37,41) ; (7,17,31,37,43) ; (7,17,31,37,47) ; (7,17,31,41,47) ; (7,17,31,43,47) ; (7,17,37,41,47) ; (7,17,37,43,47) ; (7,19,23,29,37) ; (7,19,23,29,41) ; (7,19,23,29,43) ; (7,19,23,29,47) ; (7,19,23,31,37) ; (7,19,23,31,41) ; (7,19,23,31,43) ; (7,19,23,31,47) ; (7,19,23,37,41) ; (7,19,23,37,43) ; (7,19,23,37,47) ; (7,19,23,41,47) ; (7,19,23,43,47) ; (7,19,29,37,41) ; (7,19,29,37,43) ; (7,19,29,37,47) ; (7,19,29,41,47) ; (7,19,29,43,47) ; (7,19,31,37,41) ; (7,19,31,37,43) ; (7,19,31,37,47) ; (7,19,31,41,47) ; (7,19,31,43,47) ; (7,19,37,41,47) ; (7,19,37,43,47) ; (7,23,29,37,41) ; (7,23,29,37,43) ; (7,23,29,37,47) ; (7,23,29,41,47) ; (7,23,29,43,47) ; (7,23,31,37,41) ; (7,23,31,37,43) ; (7,23,31,37,47) ; (7,23,31,41,47) ; (7,23,31,43,47) ; (7,23,37,41,47) ; (7,23,37,43,47) ; (7,29,37,41,47) ; (7,29,37,43,47) ; (7,31,37,41,47) ; (7,31,37,43,47) ; (11,17,23,29,37) ; (11,17,23,29,41) ; (11,17,23,29,43) ; (11,17,23,29,47) ; (11,17,23,31,37) ; (11,17,23,31,41) ; (11,17,23,31,43) ; (11,17,23,31,47) ; (11,17,23,37,41) ; (11,17,23,37,43) ; (11,17,23,37,47) ; (11,17,23,41,47) ; (11,17,23,43,47) ; (11,17,29,37,41) ; (11,17,29,37,43) ; (11,17,29,37,47) ; (11,17,29,41,47) ; (11,17,29,43,47) ; (11,17,31,37,41) ; (11,17,31,37,43) ; (11,17,31,37,47) ; (11,17,31,41,47) ; (11,17,31,43,47) ; (11,17,37,41,47) ; (11,17,37,43,47) ; (11,19,23,29,37) ; (11,19,23,29,41) ; (11,19,23,29,43) ; (11,19,23,29,47) ; (11,19,23,31,37) ; (11,19,23,31,41) ; (11,19,23,31,43) ; (11,19,23,31,47) ; (11,19,23,37,41) ; (11,19,23,37,43) ; (11,19,23,37,47) ; (11,19,23,41,47) ; (11,19,23,43,47) ; (11,19,29,37,41) ; (11,19,29,37,43) ; (11,19,29,37,47) ; (11,19,29,41,47) ; (11,19,29,43,47) ; (11,19,31,37,41) ; (11,19,31,37,43) ; (11,19,31,37,47) ; (11,19,31,41,47) ; (11,19,31,43,47) ; (11,19,37,41,47) ; (11,19,37,43,47) ; (11,23,29,37,41) ; (11,23,29,37,43) ; (11,23,29,37,47) ; (11,23,29,41,47) ; (11,23,29,43,47) ; (11,23,31,37,41) ; (11,23,31,37,43) ; (11,23,31,37,47) ; (11,23,31,41,47) ; (11,23,31,43,47) ; (11,23,37,41,47) ; (11,23,37,43,47) ; (11,29,37,41,47) ; (11,29,37,43,47) ; (11,31,37,41,47) ; (11,31,37,43,47) ; (13,17,23,29,37) ; (13,17,23,29,41) ; (13,17,23,29,43) ; (13,17,23,29,47) ; (13,17,23,31,37) ; (13,17,23,31,41) ; (13,17,23,31,43) ; (13,17,23,31,47) ; (13,17,23,37,41) ; (13,17,23,37,43) ; (13,17,23,37,47) ; (13,17,23,41,47) ; (13,17,23,43,47) ; (13,17,29,37,41) ; (13,17,29,37,43) ; (13,17,29,37,47) ; (13,17,29,41,47) ; (13,17,29,43,47) ; (13,17,31,37,41) ; (13,17,31,37,43) ; (13,17,31,37,47) ; (13,17,31,41,47) ; (13,17,31,43,47) ; (13,17,37,41,47) ; (13,17,37,43,47) ; (13,19,23,29,37) ; (13,19,23,29,41) ; (13,19,23,29,43) ; (13,19,23,29,47) ; (13,19,23,31,37) ; (13,19,23,31,41) ; (13,19,23,31,43) ; (13,19,23,31,47) ; (13,19,23,37,41) ; (13,19,23,37,43) ; (13,19,23,37,47) ; (13,19,23,41,47) ; (13,19,23,43,47) ; (13,19,29,37,41) ; (13,19,29,37,43) ; (13,19,29,37,47) ; (13,19,29,41,47) ; (13,19,29,43,47) ; (13,19,31,37,41) ; (13,19,31,37,43) ; (13,19,31,37,47) ; (13,19,31,41,47) ; (13,19,31,43,47) ; (13,19,37,41,47) ; (13,19,37,43,47) ; (13,23,29,37,41) ; (13,23,29,37,43) ; (13,23,29,37,47) ; (13,23,29,41,47) ; (13,23,29,43,47) ; (13,23,31,37,41) ; (13,23,31,37,43) ; (13,23,31,37,47) ; (13,23,31,41,47) ; (13,23,31,43,47) ; (13,23,37,41,47) ; (13,23,37,43,47) ; (13,29,37,41,47) ; (13,29,37,43,47) ; (13,31,37,41,47) ; (13,31,37,43,47) ; (17,23,29,37,41) ; (17,23,29,37,43) ; (17,23,29,37,47) ; (17,23,29,41,47) ; (17,23,29,43,47) ; (17,23,31,37,41) ; (17,23,31,37,43) ; (17,23,31,37,47) ; (17,23,31,41,47) ; (17,23,31,43,47) ; (17,23,37,41,47) ; (17,23,37,43,47) ; (17,29,37,41,47) ; (17,29,37,43,47) ; (17,31,37,41,47) ; (17,31,37,43,47) ; (19,23,29,37,41) ; (19,23,29,37,43) ; (19,23,29,37,47) ; (19,23,29,41,47) ; (19,23,29,43,47) ; (19,23,31,37,41) ; (19,23,31,37,43) ; (19,23,31,37,47) ; (19,23,31,41,47) ; (19,23,31,43,47) ; (19,23,37,41,47) ; (19,23,37,43,47) ; (19,29,37,41,47) ; (19,29,37,43,47) ; (19,31,37,41,47) ; (19,31,37,43,47).

4. On utilise uniquement les jetons 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8.
   (a) Quels sont tous les sacs jolis de deux jetons que l'on peut constituer ?
   On peut former les 13 sacs jolis suivants : (2, 8), (7, 8), (3, 4), (4, 5), (4, 8), (1, 7), (6, 7), (2, 6), (2, 3), (1, 5), (3, 7), (1, 2), (5, 6).

(b) Prouver que si un sac joli contient le jeton 2, alors il contient exactement deux jetons.

D'après la question précédente, un sac joli contenant le jeton 2 contient l'un des jetons suivants : 1, 3, 6 ou 8. Or les nombres $3-1=2$, $6-1=5$, $8-1=7$, $6-3=3$, $8-3=5$ et $8-6=2$ sont tous premiers. Donc si un sac joli contient le jeton 2, alors il contient exactement deux jetons.

(c) Prouver que si un sac joli ne contient pas le jeton 2, alors il contient exactement deux jetons.

Par disjonction de cas :

- si un tel sac contient le jeton 1, alors il contient l'un des jetons suivants : 7 ou 5. Mais $7-5=2$ est un nombre premier.
- si un tel sac contient le jeton 3, alors il contient l'un des jetons suivants : 4, 7. Mais $7-4=3$ est un nombre premier.
- si un tel sac contient le jeton 4, alors il contient l'un des jetons suivants : 3, 5, 8. Mais $5-3=2$, $8-5=3$ et $8-3=5$ sont des nombres premiers.
- si un tel sac contient le jeton 5, alors il contient l'un des jetons suivants : 4, 1, 6. Mais $6-4=2$, $6-1=5$ et $4-1=3$ sont des nombres premiers.
- si un tel sac contient le jeton 6, alors il contient l'un des jetons suivants : 7 ou 5. Mais $7-5=2$ est un nombre premier.
- si un tel sac contient le jeton 7, alors il contient l'un des jetons suivants : 8, 1, 6, 3. Mais $8-1=7$, $8-6=2$, $8-3=5$, $6-1=5$, $6-3=3$, $3-1=2$ sont des nombres premiers.
- si un tel sac contient le jeton 8, alors il contient l'un des jetons suivants : 4, 7. Mais $7-4=3$ est un nombre premier.

(d) Est-il possible de constituer un sac joli avec trois jetons ?

Non car si un sac joli contient le jeton 2, alors il contient exactement deux jetons et s'il ne contient pas le jeton 2, alors il contient exactement deux jetons. Dans tous les cas, un sac joli avec les jetons 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, et 8 contient exactement deux jetons.

5. (a) On dispose des seize jetons 1, 2, 3, …, 16. Combien peut-on en choisir au maximum pour que le sac soit joli ?

Avec les jetons 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, et 8, on ne peut constituer un sac joli qu'avec deux jetons.

Par conservation des différences positives, on démontre qu'avec 8 jetons consécutifs, on ne peut constituer un sac joli qu'avec deux jetons. On en déduit qu'avec les jetons 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 et 16, on ne peut faire un sac joli qu'avec deux jetons.

Par conséquent, il ne peut y avoir plus de 4 jetons dans un sac joli en utilisant les jetons 1, 2, 3, …, 16.

On vérifie que le sac contenant les jetons 1, 5, 9, 13 est joli.

Finalement, on peut choisir au maximum 4 jetons parmi 1, 2, 3, …, 16 pour que le sac soit joli.

(b) On dispose des deux-mille-vingt-deux jetons 1, 2, 3, …, 2022. Combien peut-on en choisir au maximum pour que le sac soit joli ?

$\{1,2,3,\dots,2022\} = \{1,2,3,\dots,8\} \cup \{9,10,11,\dots,16\} \cup \{17,18,19\dots,24\} \cup \{9,10,11,\dots,16\} \cup \dots \cup \{2009,2010,2011\dots,2016\} \cup \{2017,2018,2019,2020,2021,2022\}$

Avec 8 jetons consécutifs, on ne peut constituer un sac joli qu'avec deux jetons : on en déduit qu'en utilisant les jetons 1, 2, 3, …, 2022, le nombre maximum de jetons que peut contenir un sac joli est inférieur ou égal à $252 \times 2 + 2 = 506$.

On démontre que les jetons de la forme $1+4\times k$, où k est un entier naturel tel que $0 \leqslant k \leqslant 505$, permettent de faire un sac joli de 506 jetons. Pour cela, on remarque que si les jetons sont de la forme $1 + 4 \times k$ et $1 + 4 \times k'$, avec k et k' deux entiers naturels tels que $0 \leqslant k < k' \leqslant 505$, alors $(1 + 4 \times k') - (1 + 4 \times k) = 4 \times (k' - k)$ n'est pas un nombre premier.

Finalement, on peut choisir au maximum 506 jetons parmi 1, 2, 3, …, 2022 pour que le sac soit joli.