MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE LA JEUNESSE ET DES SPORTS
*Liberté Égalité Fraternité*

# Olympiades nationales de mathématiques 2022

## Voie technologique

ACADÉMIE DE NICE
*Liberté Égalité Fraternité*

---

## Académie de Nice

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie («exercices nationaux»). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie («exercices académiques»). Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

**Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.**

# Exercices académiques

## Résolution individuelle

Les candidats traitent **les deux exercices**.

# Exercice 1 : Somme apparente

Dans tout l'exercice, les probabilités seront arrondies au millième.

Des gobelets opaques contiennent des pièces de monnaie de 1€ et de 2€. On secoue les gobelets avant de les retourner sur une table. Pour chaque pièce, la probabilité d'obtenir *face* est égale à la probabilité d'obtenir *pile* et les tirages sont indépendants. Dans tout l'exercice, la *somme apparente* est égale à la somme des valeurs des pièces tombées sur *pile*.

Dans cet exemple, la *somme apparente* est $5 \times 1€ + 4 \times 2€ = 13€$.

**Partie A : avec des pièces de 1€**

1. On utilise deux gobelets contenant deux pièces de 1€ chacun. On secoue les gobelets et on les retourne sur la table.
   (a) La somme apparente peut-elle être égale à 5€ ?
   Non car la somme apparente est inférieure ou égale à 4€.
   (b) Calculer la probabilité que la somme apparente soit égale à 4€.
   La probabilité que la somme apparente soit égale à 4€ *visibles* est égale à $\frac{1}{16} \simeq 0,063$.
   (c) Quelle est la probabilité que la somme apparente soit supérieure ou égale à 3€ ?
   Cette probabilité est égale à $\frac{5}{16} \simeq 0,313$.
2. On utilise deux gobelets contenant deux pièces de 1€ chacun. On secoue les gobelets et on les retourne sur la table. On soulève un seul des deux gobelets : la somme apparente de ses pièces est égale à 1€. Quelle est la probabilité que la somme apparente des quatre pièces sur la table soit égale à 3€ ?
   Cette probabilité est égale à la probabilité d'avoir une somme apparente de 2€ avec deux pièces : elle est égale à $\frac{1}{4} = 0,25$.

Dans toute la suite de l'exercice, on pourra utiliser le tableau de probabilités ci-dessous. On rappelle que toutes les probabilités sont arrondies au millième.

| | 0 « pile » | 1 « pile » | 2 « pile » | 3 « pile » | 4 « pile » | 5 « pile » | 6 « pile » | 7 « pile » | 8 « pile » | 9 « pile » |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Avec 9 pièces** | 0,002 | 0,018 | 0,070 | 0,164 | 0,246 | 0,246 | 0,164 | 0,070 | 0,018 | 0,002 |
| **Avec 8 pièces** | 0,004 | 0,031 | 0,109 | 0,219 | 0,273 | 0,219 | 0,109 | 0,031 | 0,004 | 0 |
| **Avec 7 pièces** | 0,008 | 0,055 | 0,164 | 0,273 | 0,273 | 0,164 | 0,055 | 0,008 | 0 | 0 |
| **Avec 6 pièces** | 0,016 | 0,094 | 0,234 | 0,313 | 0,234 | 0,094 | 0,016 | 0 | 0 | 0 |
| **Avec 5 pièces** | 0,031 | 0,156 | 0,313 | 0,313 | 0,156 | 0,031 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **Avec 4 pièces** | 0,063 | 0,250 | 0,375 | 0,250 | 0,063 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Exemple de lecture : en lançant 7 pièces de monnaie, la probabilité d'obtenir 5 faces est environ égale à 0,164.

3. Pour cette question, on utilise trois gobelets contenant trois pièces de 1€. On les secoue et on les retourne sur la table.

   (a) Calculer la probabilité que la somme apparente soit inférieure ou égale à 5€.
   D'après le tableau, cette probabilité est environ égale à $0,002 + 0,018 + 0,070 + 0,164 + 0,246 + 0,246 = 0,746$.

   (b) On recommence l'expérience et on soulève un seul des trois gobelets : sous celui-ci, on dénombre deux "pile" et une "face". Quelle est la probabilité que la somme apparente des neuf pièces sur la table soit inférieure ou égale à 5€ ?
   Cette probabilité est égale à la probabilité d'avoir une somme apparente inférieure ou égale à 3€ avec 6 pièces : elle est environ égale à $0,016 + 0,094 + 0,234 + 0,313 = 0,657$.

**Partie B : avec des pièces de 1€ et de 2€**

1. On utilise deux gobelets : chacun a une pièce de 1€ et une pièce de 2€. On les secoue et on les retourne sur la table.

   (a) Quelle est la probabilité que la somme apparente soit égale à 5€ ?
   La probabilité que la somme apparente soit égale à 5€ est $\frac{2}{16} = \frac{1}{8} = 0,125$.

   (b) Quelle est la probabilité que la somme apparente soit supérieure ou égale à 4€ ?
   La probabilité que la somme apparente soit supérieure ou égale à 4€ est $\frac{6}{16} = \frac{3}{8} = 0,375$.

   (c) On recommence l'expérience puis on soulève l'un des deux gobelets : la somme apparente de ses pièces est égale à 2€. Quelle est la probabilité que la somme apparente des quatre pièces sur la table soit inférieure ou égale à 4€ ?
   Cette probabilité est égale à la probabilité d'avoir une somme apparente inférieure ou égale à 2€ avec une pièce de 1€ et une pièce de 2€ : elle est égale à $\frac{3}{4} = 0,75$.

2. On utilise quatre gobelets contenant chacun une pièce de 1€ et une pièce de 2€. On les secoue et on les retourne sur la table.

   (a) Quelle est la probabilité que la somme apparente soit égale à 8€ ?

   On peut obtenir 8€ avec :

   - 4 pièces de 2€ et 0 pièces de 1€ : la probabilité associée est environ égale à $0,063 \times 0,063 \simeq 0,004$.
   - 3 pièces de 2€ et 2 pièces de 1€ : la probabilité associée est environ égale à $0,25 \times 0,375 \simeq 0,094$.
   - 2 pièces de 2€ et 4 pièces de 1€ : la probabilité associée est environ égale à $0,375 \times 0,063 \simeq 0,024$.

   La probabilité que la somme apparente soit égale à 8€ est donc environ égale à $0,004 + 0,094 + 0,024 = 0,122$.

   (b) On recommence l'expérience puis on soulève l'un des quatre gobelets : la somme apparente de ses pièces est égale à 3€. Quelle est la probabilité que la somme apparente des huit pièces sur la table soit égale à 8€ ?

   Cette probabilité est égale à la probabilité d'avoir une somme apparente de 5€ avec les pièces des autres gobelets : trois de 1€ et trois de 2€.

   On peut obtenir 5€ avec :

   - 2 pièces de 2€ et 1 pièces de 1€ : la probabilité associée est environ égale à $0,375 \times 0,375 \simeq 0,141$.
   - 1 pièces de 2€ et 3 pièces de 1€ : la probabilité associée est environ égale à $0,375 \times 0,125 \simeq 0,047$.

   La probabilité que la somme apparente soit égale à 8€ est donc environ égale à $0,141 + 0,047 = 0,188$.

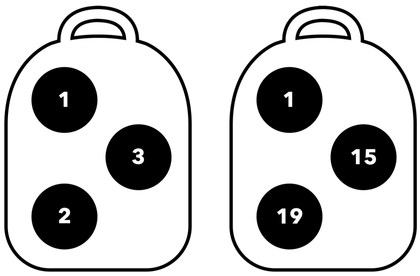
# Exercice 2 : Des jetons et des sacs

On rappelle qu'un nombre premier est un nombre entier naturel ayant exactement deux diviseurs positifs : 1 et lui-même.

Les nombres premiers inférieurs ou égaux à 50 sont : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.
On rappelle que 1 n'est pas un nombre premier.

Un sac contient plusieurs jetons, tous distincts. Sur chaque jeton est inscrit un nombre entier.
On convient de nommer « jeton $n$ » le jeton sur lequel est écrit le nombre entier $n$.

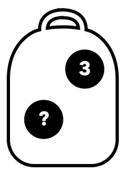
On dit que le sac est **joli** si, pour tous les couples de jetons du sac, la différence positive des nombres inscrits sur les jetons n'est pas un nombre premier. On en déduit que le sac **n'est pas joli** s'il existe au moins un couple de jetons du sac dont la différence positive est un nombre premier.



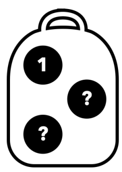

Le sac n'est pas joli. Le sac est joli.

Par exemple, le sac contenant les jetons 1, 2 et 3 « n'est pas joli » car $3 - 1 = 2$ et 2 est un nombre premier. En revanche, le sac contenant les jetons 1, 15 et 19 « est joli » car les différences positives sont $15 - 1 = 14$, $19 - 1 = 18$, $19 - 15 = 4$ et ni 14, ni 18, ni 4 ne sont des nombres premiers.

1. Dans cette question, on considère un sac contenant deux jetons : le jeton 3 et le jeton $n$.
   (a) Le sac est-il joli si $n = 2$ ?
   $3 - 2 = 1$ et 1 n'est pas un nombre premier donc le sac est joli.
   (b) Le sac est-il joli si $n = 5$ ?
   $5 - 3 = 2$ et 2 est un nombre premier donc le sac n'est pas joli.
   (c) Pour quelles valeurs de $n$, comprises entre 1 et 20 inclus, le sac est-il joli ?
   On peut utiliser les jetons 2, 4, 7, 9, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 19.




2. Dans cette question, on considère un sac contenant trois jetons, dont le jeton 1. En choisissant deux autres jetons parmi les jetons 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et 10, donner un exemple de sac « joli ».
   On peut former les sacs jolis :
   - 1, 2, 10
   - 1, 5, 9
   - 1, 9, 10
   - 2, 6, 10



3. En justifiant les réponses, dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

   (a) Il est possible de faire un sac joli avec trois nombres premiers.

   Vrai. Les sacs jolis possibles avec trois nombres premiers inférieurs à 50 sont (2,3,11) ; (2,3,17) ; (2,3,23) ; (2,3,29) ; (2,3,37) ; (2,3,41) ; (2,3,47) ; (2,11,17) ; (2,11,23) ; (2,11,29) ; (2,11,37) ; (2,11,41) ; (2,11,47) ; (2,17,23) ; (2,17,29) ; (2,17,37) ; (2,17,41) ; (2,17,47) ; (2,23,29) ; (2,23,37) ; (2,23,41) ; (2,23,47) ; (2,29,37) ; (2,29,41) ; (2,29,47) ; (2,37,41) ; (2,37,47) ; (2,41,47) ; (3,7,11) ; (3,7,13) ; (3,7,17) ; (3,7,19) ; (3,7,23) ; (3,7,29) ; (3,7,31) ; (3,7,37) ; (3,7,41) ; (3,7,43) ; (3,7,47) ; (3,11,17) ; (3,11,19) ; (3,11,23) ; (3,11,29) ; (3,11,31) ; (3,11,37) ; (3,11,41) ; (3,11,43) ; (3,11,47) ; (3,13,17) ; (3,13,19) ; (3,13,23) ; (3,13,29) ; (3,13,31) ; (3,13,37) ; (3,13,41) ; (3,13,43) ; (3,13,47) ; (3,17,23) ; (3,17,29) ; (3,17,31) ; (3,17,37) ; (3,17,41) ; (3,17,43) ; (3,17,47) ; (3,19,23) ; (3,19,29) ; (3,19,31) ; (3,19,37) ; (3,19,41) ; (3,19,43) ; (3,19,47) ; (3,23,29) ; (3,23,31) ; (3,23,37) ; (3,23,41) ; (3,23,43) ; (3,23,47) ; (3,29,37) ; (3,29,41) ; (3,29,43) ; (3,29,47) ; (3,31,37) ; (3,31,41) ; (3,31,43) ; (3,31,47) ; (3,37,41) ; (3,37,43) ; (3,37,47) ; (3,41,47) ; (3,43,47) ; (5,11,17) ; (5,11,19) ; (5,11,23) ; (5,11,29) ; (5,11,31) ; (5,11,37) ; (5,11,41) ; (5,11,43) ; (5,11,47) ; (5,13,17) ; (5,13,19) ; (5,13,23) ; (5,13,29) ; (5,13,31) ; (5,13,37) ; (5,13,41) ; (5,13,43) ; (5,13,47) ; (5,17,23) ; (5,17,29) ; (5,17,31) ; (5,17,37) ; (5,17,41) ; (5,17,43) ; (5,17,47) ; (5,19,23) ; (5,19,29) ; (5,19,31) ; (5,19,37) ; (5,19,41) ; (5,19,43) ; (5,19,47) ; (5,23,29) ; (5,23,31) ; (5,23,37) ; (5,23,41) ; (5,23,43) ; (5,23,47) ; (5,29,37) ; (5,29,41) ; (5,29,43) ; (5,29,47) ; (5,31,37) ; (5,31,41) ; (5,31,43) ; (5,31,47) ; (5,37,41) ; (5,37,43) ; (5,37,47) ; (5,41,47) ; (5,43,47) ; (7,11,17) ; (7,11,19) ; (7,11,23) ; (7,11,29) ; (7,11,31) ; (7,11,37) ; (7,11,41) ; (7,11,43) ; (7,11,47) ; (7,13,17) ; (7,13,19) ; (7,13,23) ; (7,13,29) ; (7,13,31) ; (7,13,37) ; (7,13,41) ; (7,13,43) ; (7,13,47) ; (7,17,23) ; (7,17,29) ; (7,17,31) ; (7,17,37) ; (7,17,41) ; (7,17,43) ; (7,17,47) ; (7,19,23) ; (7,19,29) ; (7,19,31) ; (7,19,37) ; (7,19,41) ; (7,19,43) ; (7,19,47) ; (7,23,29) ; (7,23,31) ; (7,23,37) ; (7,23,41) ; (7,23,43) ; (7,23,47) ; (7,29,37) ; (7,29,41) ; (7,29,43) ; (7,29,47) ; (7,31,37) ; (7,31,41) ; (7,31,43) ; (7,31,47) ; (7,37,41) ; (7,37,43) ; (7,37,47) ; (7,41,47) ; (7,43,47) ; (11,17,23) ; (11,17,29) ; (11,17,31) ; (11,17,37) ; (11,17,41) ; (11,17,43) ; (11,17,47) ; (11,19,23) ; (11,19,29) ; (11,19,31) ; (11,19,37) ; (11,19,41) ; (11,19,43) ; (11,19,47) ; (11,23,29) ; (11,23,31) ; (11,23,37) ; (11,23,41) ; (11,23,43) ; (11,23,47) ; (11,29,37) ; (11,29,41) ; (11,29,43) ; (11,29,47) ; (11,31,37) ; (11,31,41) ; (11,31,43) ; (11,31,47) ; (11,37,41) ; (11,37,43) ; (11,37,47) ; (11,41,47) ; (11,43,47) ; (13,17,23) ; (13,17,29) ; (13,17,31) ; (13,17,37) ; (13,17,41) ; (13,17,43) ; (13,17,47) ; (13,19,23) ; (13,19,29) ; (13,19,31) ; (13,19,37) ; (13,19,41) ; (13,19,43) ; (13,19,47) ; (13,23,29) ; (13,23,31) ; (13,23,37) ; (13,23,41) ; (13,23,43) ; (13,23,47) ; (13,29,37) ; (13,29,41) ; (13,29,43) ; (13,29,47) ; (13,31,37) ; (13,31,41) ; (13,31,43) ; (13,31,47) ; (13,37,41) ; (13,37,43) ; (13,37,47) ; (13,41,47) ; (13,43,47) ; (17,23,29) ; (17,23,31) ; (17,23,37) ; (17,23,41) ; (17,23,43) ; (17,23,47) ; (17,29,37) ; (17,29,41) ; (17,29,43) ; (17,29,47) ; (17,31,37) ; (17,31,41) ; (17,31,43) ; (17,31,47) ; (17,37,41) ; (17,37,43) ; (17,37,47) ; (17,41,47) ; (17,43,47) ; (19,23,29) ; (19,23,31) ; (19,23,37) ; (19,23,41) ; (19,23,43) ; (19,23,47) ; (19,29,37) ; (19,29,41) ; (19,29,43) ; (19,29,47) ; (19,31,37) ; (19,31,41) ; (19,31,43) ; (19,31,47) ; (19,37,41) ; (19,37,43) ; (19,37,47) ; (19,41,47) ; (19,43,47) ; (23,29,37) ; (23,29,41) ; (23,29,43) ; (23,29,47) ; (23,31,37) ; (23,31,41) ; (23,31,43) ; (23,31,47) ; (23,37,41) ; (23,37,43) ; (23,37,47) ; (23,41,47) ; (23,43,47) ; (29,37,41) ; (29,37,43) ; (29,37,47) ; (29,41,47) ; (29,43,47) ; (31,37,41) ; (31,37,43) ; (31,37,47) ; (31,41,47) ; (31,43,47) ; (37,41,47) ; (37,43,47).

   (b) Si un sac de trois jetons est joli, alors il n'est plus joli si on lui retire un de ses jetons.

   Faux. Les différences positives des jetons qui restent dans le sac ne sont pas des nombres premiers.

   (c) La somme des jetons d'un sac joli à trois jetons peut être un nombre premier.

   Vrai. Les sacs jolis possibles avec trois jetons dont la somme est un nombre premier inférieur à 50 sont (1,2,10) ; (1,2,16) ; (1,2,26) ; (1,2,28) ; (1,2,34) ; (1,2,40) ; (1,5,11) ; (1,5,13) ; (1,5,17) ; (1,5,23) ; (1,5,25) ; (1,5,31) ; (1,5,35) ; (1,5,37) ; (1,5,41) ; (1,7,11) ; (1,7,15) ; (1,7,21) ; (1,7,23) ; (1,7,29) ; (1,7,33) ; (1,7,35) ; (1,7,39) ; (1,9,13) ; (1,9,19) ; (1,9,21) ; (1,9,27) ; (1,9,31) ; (1,9,33) ; (1,9,37) ; (1,10,26) ; (1,10,36) ; (1,11,17) ; (1,11,19) ; (1,11,25) ; (1,11,29) ; (1,11,31) ; (1,11,35) ;

(1,13,17) ; (1,13,23) ; (1,13,27) ; (1,13,29) ; (1,13,33) ; (1,15,21) ; (1,15,25) ; (1,15,27) ; (1,15,31) ; (1,16,26) ; (1,17,23) ; (1,17,25) ; (1,17,29) ; (1,19,23) ; (1,19,27) ; (1,21,25) ; (2,3,12) ; (2,3,18) ; (2,3,24) ; (2,3,36) ; (2,3,38) ; (2,3,42) ; (2,10,11) ; (2,10,35) ; (2,12,27) ; (2,17,18) ; (2,18,27) ; (2,22,23) ; (3,4,12) ; (3,4,24) ; (3,4,30) ; (3,4,36) ; (3,7,13) ; (3,7,19) ; (3,7,21) ; (3,7,27) ; (3,7,31) ; (3,7,33) ; (3,7,37) ; (3,9,17) ; (3,9,19) ; (3,9,25) ; (3,9,29) ; (3,9,31) ; (3,9,35) ; (3,11,15) ; (3,11,17) ; (3,11,23) ; (3,11,27) ; (3,11,29) ; (3,11,33) ; (3,12,28) ; (3,13,21) ; (3,13,25) ; (3,13,27) ; (3,13,31) ; (3,15,19) ; (3,15,23) ; (3,15,25) ; (3,15,29) ; (3,17,21) ; (3,17,23) ; (3,17,27) ; (3,19,25) ; (4,5,14) ; (4,5,20) ; (4,5,32) ; (4,5,38) ; (4,8,29) ; (4,12,13) ; (4,13,14) ; (4,14,29) ; (4,18,19) ; (4,19,20) ; (5,6,20) ; (5,6,26) ; (5,6,30) ; (5,6,32) ; (5,9,15) ; (5,9,17) ; (5,9,23) ; (5,9,27) ; (5,9,29) ; (5,9,33) ; (5,11,15) ; (5,11,21) ; (5,11,25) ; (5,11,27) ; (5,11,31) ; (5,13,19) ; (5,13,23) ; (5,13,25) ; (5,13,29) ; (5,15,21) ; (5,15,23) ; (5,15,27) ; (5,17,21) ; (5,17,25) ; (5,19,23) ; (6,7,16) ; (6,7,28) ; (6,7,34) ; (6,10,31) ; (6,15,16) ; (6,20,21) ; (7,8,16) ; (7,8,22) ; (7,8,28) ; (7,8,32) ; (7,11,19) ; (7,11,23) ; (7,11,25) ; (7,11,29) ; (7,13,17) ; (7,13,21) ; (7,13,23) ; (7,13,27) ; (7,15,19) ; (7,15,21) ; (7,15,25) ; (7,17,23) ; (8,9,24) ; (8,9,30) ; (8,16,17) ; (8,17,18) ; (9,10,18) ; (9,10,24) ; (9,13,19) ; (9,13,21) ; (9,13,25) ; (9,15,19) ; (9,15,23) ; (9,17,21) ; (10,11,20) ; (10,11,26) ; (10,18,19) ; (11,12,20) ; (11,15,21) ; (12,13,22).

(d) Il existe un sac joli contenant exactement 5 nombres premiers.

Vrai. Les sacs jolis contenant exactement 5 nombres premiers inférieurs à 50 sont :

(2,11,17,23,29) ; (2,11,17,23,37) ; (2,11,17,23,41) ; (2,11,17,23,47) ; (2,11,17,29,37) ; (2,11,17,29,41) ; (2,11,17,29,47) ; (2,11,17,37,41) ; (2,11,17,37,47) ; (2,11,17,41,47) ; (2,11,23,29,37) ; (2,11,23,29,41) ; (2,11,23,29,47) ; (2,11,23,37,41) ; (2,11,23,37,47) ; (2,11,23,41,47) ; (2,11,29,37,41) ; (2,11,29,37,47) ; (2,11,29,41,47) ; (2,11,37,41,47) ; (2,17,23,29,37) ; (2,17,23,29,41) ; (2,17,23,29,47) ; (2,17,23,37,41) ; (2,17,23,37,47) ; (2,17,23,41,47) ; (2,17,29,37,41) ; (2,17,29,37,47) ; (2,17,29,41,47) ; (2,17,37,41,47) ; (2,23,29,37,41) ; (2,23,29,37,47) ; (2,23,29,41,47) ; (2,23,37,41,47) ; (2,29,37,41,47) ; (2,3,11,17,23) ; (2,3,11,17,29) ; (2,3,11,17,37) ; (2,3,11,17,41) ; (2,3,11,17,47) ; (2,3,11,23,29) ; (2,3,11,23,37) ; (2,3,11,23,41) ; (2,3,11,23,47) ; (2,3,11,29,37) ; (2,3,11,29,41) ; (2,3,11,29,47) ; (2,3,11,37,41) ; (2,3,11,37,47) ; (2,3,11,41,47) ; (2,3,17,23,29) ; (2,3,17,23,37) ; (2,3,17,23,41) ; (2,3,17,23,47) ; (2,3,17,29,37) ; (2,3,17,29,41) ; (2,3,17,29,47) ; (2,3,17,37,41) ; (2,3,17,37,47) ; (2,3,17,41,47) ; (2,3,23,29,37) ; (2,3,23,29,41) ; (2,3,23,29,47) ; (2,3,23,37,41) ; (2,3,23,37,47) ; (2,3,23,41,47) ; (2,3,29,37,41) ; (2,3,29,37,47) ; (2,3,29,41,47) ; (2,3,37,41,47) ; (23,29,37,41,47) ; (23,29,37,43,47) ; (23,31,37,41,47) ; (23,31,37,43,47) ; (3,11,17,23,29) ; (3,11,17,23,31) ; (3,11,17,23,37) ; (3,11,17,23,41) ; (3,11,17,23,43) ; (3,11,17,23,47) ; (3,11,17,29,37) ; (3,11,17,29,41) ; (3,11,17,29,43) ; (3,11,17,29,47) ; (3,11,17,31,37) ; (3,11,17,31,41) ; (3,11,17,31,43) ; (3,11,17,31,47) ; (3,11,17,37,41) ; (3,11,17,37,43) ; (3,11,17,37,47) ; (3,11,17,41,47) ; (3,11,17,43,47) ; (3,11,19,23,29) ; (3,11,19,23,31) ; (3,11,19,23,37) ; (3,11,19,23,41) ; (3,11,19,23,43) ; (3,11,19,23,47) ; (3,11,19,29,37) ; (3,11,19,29,41) ; (3,11,19,29,43) ; (3,11,19,29,47) ; (3,11,19,31,37) ; (3,11,19,31,41) ; (3,11,19,31,43) ; (3,11,19,31,47) ; (3,11,19,37,41) ; (3,11,19,37,43) ; (3,11,19,37,47) ; (3,11,19,41,47) ; (3,11,19,43,47) ; (3,11,23,29,37) ; (3,11,23,29,41) ; (3,11,23,29,43) ; (3,11,23,29,47) ; (3,11,23,31,37) ; (3,11,23,31,41) ; (3,11,23,31,43) ; (3,11,23,31,47) ; (3,11,23,37,41) ; (3,11,23,37,43) ; (3,11,23,37,47) ; (3,11,23,41,47) ; (3,11,23,43,47) ; (3,11,29,37,41) ; (3,11,29,37,43) ; (3,11,29,37,47) ; (3,11,29,41,47) ; (3,11,29,43,47) ; (3,11,31,37,41) ; (3,11,31,37,43) ; (3,11,31,37,47) ; (3,11,31,41,47) ; (3,11,31,43,47) ; (3,11,37,41,47) ; (3,11,37,43,47) ; (3,13,17,23,29) ; (3,13,17,23,31) ; (3,13,17,23,37) ; (3,13,17,23,41) ; (3,13,17,23,43) ; (3,13,17,23,47) ; (3,13,17,29,37) ; (3,13,17,29,41) ; (3,13,17,29,43) ; (3,13,17,29,47) ; (3,13,17,31,37) ; (3,13,17,31,41) ; (3,13,17,31,43) ; (3,13,17,31,47) ; (3,13,17,37,41) ; (3,13,17,37,43) ; (3,13,17,37,47) ; (3,13,17,41,47) ; (3,13,17,43,47) ; (3,13,19,23,29) ; (3,13,19,23,31) ; (3,13,19,23,37) ; (3,13,19,23,41) ; (3,13,19,23,43) ; (3,13,19,23,47) ; (3,13,19,29,37) ; (3,13,19,29,41) ; (3,13,19,29,43) ; (3,13,19,29,47) ; (3,13,19,31,37) ; (3,13,19,31,41) ; (3,13,19,31,43) ; (3,13,19,31,47) ;

(3,13,19,37,41) ; (3,13,19,37,43) ; (3,13,19,37,47) ; (3,13,19,41,47) ; (3,13,19,43,47) ;
(3,13,23,29,37) ; (3,13,23,29,41) ; (3,13,23,29,43) ; (3,13,23,29,47) ; (3,13,23,31,37) ;
(3,13,23,31,41) ; (3,13,23,31,43) ; (3,13,23,31,47) ; (3,13,23,37,41) ; (3,13,23,37,43) ;
(3,13,23,37,47) ; (3,13,23,41,47) ; (3,13,23,43,47) ; (3,13,29,37,41) ; (3,13,29,37,43) ;
(3,13,29,37,47) ; (3,13,29,41,47) ; (3,13,29,43,47) ; (3,13,31,37,41) ; (3,13,31,37,43) ;
(3,13,31,37,47) ; (3,13,31,41,47) ; (3,13,31,43,47) ; (3,13,37,41,47) ; (3,13,37,43,47) ;
(3,17,23,29,37) ; (3,17,23,29,41) ; (3,17,23,29,43) ; (3,17,23,29,47) ; (3,17,23,31,37) ;
(3,17,23,31,41) ; (3,17,23,31,43) ; (3,17,23,31,47) ; (3,17,23,37,41) ; (3,17,23,37,43) ;
(3,17,23,37,47) ; (3,17,23,41,47) ; (3,17,23,43,47) ; (3,17,29,37,41) ; (3,17,29,37,43) ;
(3,17,29,37,47) ; (3,17,29,41,47) ; (3,17,29,43,47) ; (3,17,31,37,41) ; (3,17,31,37,43) ;
(3,17,31,37,47) ; (3,17,31,41,47) ; (3,17,31,43,47) ; (3,17,37,41,47) ; (3,17,37,43,47) ;
(3,19,23,29,37) ; (3,19,23,29,41) ; (3,19,23,29,43) ; (3,19,23,29,47) ; (3,19,23,31,37) ;
(3,19,23,31,41) ; (3,19,23,31,43) ; (3,19,23,31,47) ; (3,19,23,37,41) ; (3,19,23,37,43) ;
(3,19,23,37,47) ; (3,19,23,41,47) ; (3,19,23,43,47) ; (3,19,29,37,41) ; (3,19,29,37,43) ;
(3,19,29,37,47) ; (3,19,29,41,47) ; (3,19,29,43,47) ; (3,19,31,37,41) ; (3,19,31,37,43) ;
(3,19,31,37,47) ; (3,19,31,41,47) ; (3,19,31,43,47) ; (3,19,37,41,47) ; (3,19,37,43,47) ;
(3,23,29,37,41) ; (3,23,29,37,43) ; (3,23,29,37,47) ; (3,23,29,41,47) ; (3,23,29,43,47) ;
(3,23,31,37,41) ; (3,23,31,37,43) ; (3,23,31,37,47) ; (3,23,31,41,47) ; (3,23,31,43,47) ;
(3,23,37,41,47) ; (3,23,37,43,47) ; (3,29,37,41,47) ; (3,29,37,43,47) ; (3,31,37,41,47) ;
(3,31,37,43,47) ; (3,7,11,17,23) ; (3,7,11,17,29) ; (3,7,11,17,31) ; (3,7,11,17,37) ;
(3,7,11,17,41) ; (3,7,11,17,43) ; (3,7,11,17,47) ; (3,7,11,19,23) ; (3,7,11,19,29) ; (3,7,11,19,31) ;
(3,7,11,19,37) ; (3,7,11,19,41) ; (3,7,11,19,43) ; (3,7,11,19,47) ; (3,7,11,23,29) ; (3,7,11,23,31) ;
(3,7,11,23,37) ; (3,7,11,23,41) ; (3,7,11,23,43) ; (3,7,11,23,47) ; (3,7,11,29,37) ; (3,7,11,29,41) ;
(3,7,11,29,43) ; (3,7,11,29,47) ; (3,7,11,31,37) ; (3,7,11,31,41) ; (3,7,11,31,43) ; (3,7,11,31,47) ;
(3,7,11,37,41) ; (3,7,11,37,43) ; (3,7,11,37,47) ; (3,7,11,41,47) ; (3,7,11,43,47) ; (3,7,13,17,23) ;
(3,7,13,17,29) ; (3,7,13,17,31) ; (3,7,13,17,37) ; (3,7,13,17,41) ; (3,7,13,17,43) ; (3,7,13,17,47) ;
(3,7,13,19,23) ; (3,7,13,19,29) ; (3,7,13,19,31) ; (3,7,13,19,37) ; (3,7,13,19,41) ; (3,7,13,19,43) ;
(3,7,13,19,47) ; (3,7,13,23,29) ; (3,7,13,23,31) ; (3,7,13,23,37) ; (3,7,13,23,41) ; (3,7,13,23,43) ;
(3,7,13,23,47) ; (3,7,13,29,37) ; (3,7,13,29,41) ; (3,7,13,29,43) ; (3,7,13,29,47) ; (3,7,13,31,37) ;
(3,7,13,31,41) ; (3,7,13,31,43) ; (3,7,13,31,47) ; (3,7,13,37,41) ; (3,7,13,37,43) ; (3,7,13,37,47) ;
(3,7,13,41,47) ; (3,7,13,43,47) ; (3,7,17,23,29) ; (3,7,17,23,31) ; (3,7,17,23,37) ; (3,7,17,23,41) ;
(3,7,17,23,43) ; (3,7,17,23,47) ; (3,7,17,29,37) ; (3,7,17,29,41) ; (3,7,17,29,43) ; (3,7,17,29,47) ;
(3,7,17,31,37) ; (3,7,17,31,41) ; (3,7,17,31,43) ; (3,7,17,31,47) ; (3,7,17,37,41) ; (3,7,17,37,43) ;
(3,7,17,37,47) ; (3,7,17,41,47) ; (3,7,17,43,47) ; (3,7,19,23,29) ; (3,7,19,23,31) ; (3,7,19,23,37) ;
(3,7,19,23,41) ; (3,7,19,23,43) ; (3,7,19,23,47) ; (3,7,19,29,37) ; (3,7,19,29,41) ; (3,7,19,29,43) ;
(3,7,19,29,47) ; (3,7,19,31,37) ; (3,7,19,31,41) ; (3,7,19,31,43) ; (3,7,19,31,47) ; (3,7,19,37,41) ;
(3,7,19,37,43) ; (3,7,19,37,47) ; (3,7,19,41,47) ; (3,7,19,43,47) ; (3,7,23,29,37) ; (3,7,23,29,41) ;
(3,7,23,29,43) ; (3,7,23,29,47) ; (3,7,23,31,37) ; (3,7,23,31,41) ; (3,7,23,31,43) ; (3,7,23,31,47) ;
(3,7,23,37,41) ; (3,7,23,37,43) ; (3,7,23,37,47) ; (3,7,23,41,47) ; (3,7,23,43,47) ; (3,7,29,37,41) ;
(3,7,29,37,43) ; (3,7,29,37,47) ; (3,7,29,41,47) ; (3,7,29,43,47) ; (3,7,31,37,41) ; (3,7,31,37,43) ;
(3,7,31,37,47) ; (3,7,31,41,47) ; (3,7,31,43,47) ; (3,7,37,41,47) ; (3,7,37,43,47) ;
(5,11,17,23,29) ; (5,11,17,23,31) ; (5,11,17,23,37) ; (5,11,17,23,41) ; (5,11,17,23,43) ;
(5,11,17,23,47) ; (5,11,17,29,37) ; (5,11,17,29,41) ; (5,11,17,29,43) ; (5,11,17,29,47) ;
(5,11,17,31,37) ; (5,11,17,31,41) ; (5,11,17,31,43) ; (5,11,17,31,47) ; (5,11,17,37,41) ;
(5,11,17,37,43) ; (5,11,17,37,47) ; (5,11,17,41,47) ; (5,11,17,43,47) ; (5,11,19,23,29) ;
(5,11,19,23,31) ; (5,11,19,23,37) ; (5,11,19,23,41) ; (5,11,19,23,43) ; (5,11,19,23,47) ;
(5,11,19,29,37) ; (5,11,19,29,41) ; (5,11,19,29,43) ; (5,11,19,29,47) ; (5,11,19,31,37) ;
(5,11,19,31,41) ; (5,11,19,31,43) ; (5,11,19,31,47) ; (5,11,19,37,41) ; (5,11,19,37,43) ;
(5,11,19,37,47) ; (5,11,19,41,47) ; (5,11,19,43,47) ; (5,11,23,29,37) ; (5,11,23,29,41) ;
(5,11,23,29,43) ; (5,11,23,29,47) ; (5,11,23,31,37) ; (5,11,23,31,41) ; (5,11,23,31,43) ;
(5,11,23,31,47) ; (5,11,23,37,41) ; (5,11,23,37,43) ; (5,11,23,37,47) ; (5,11,23,41,47) ;

(5,11,23,43,47) ; (5,11,29,37,41) ; (5,11,29,37,43) ; (5,11,29,37,47) ; (5,11,29,41,47) ;
(5,11,29,43,47) ; (5,11,31,37,41) ; (5,11,31,37,43) ; (5,11,31,37,47) ; (5,11,31,41,47) ;
(5,11,31,43,47) ; (5,11,37,41,47) ; (5,11,37,43,47) ; (5,13,17,23,29) ; (5,13,17,23,31) ;
(5,13,17,23,37) ; (5,13,17,23,41) ; (5,13,17,23,43) ; (5,13,17,23,47) ; (5,13,17,29,37) ;
(5,13,17,29,41) ; (5,13,17,29,43) ; (5,13,17,29,47) ; (5,13,17,31,37) ; (5,13,17,31,41) ;
(5,13,17,31,43) ; (5,13,17,31,47) ; (5,13,17,37,41) ; (5,13,17,37,43) ; (5,13,17,37,47) ;
(5,13,17,41,47) ; (5,13,17,43,47) ; (5,13,19,23,29) ; (5,13,19,23,31) ; (5,13,19,23,37) ;
(5,13,19,23,41) ; (5,13,19,23,43) ; (5,13,19,23,47) ; (5,13,19,29,37) ; (5,13,19,29,41) ;
(5,13,19,29,43) ; (5,13,19,29,47) ; (5,13,19,31,37) ; (5,13,19,31,41) ; (5,13,19,31,43) ;
(5,13,19,31,47) ; (5,13,19,37,41) ; (5,13,19,37,43) ; (5,13,19,37,47) ; (5,13,19,41,47) ;
(5,13,19,43,47) ; (5,13,23,29,37) ; (5,13,23,29,41) ; (5,13,23,29,43) ; (5,13,23,29,47) ;
(5,13,23,31,37) ; (5,13,23,31,41) ; (5,13,23,31,43) ; (5,13,23,31,47) ; (5,13,23,37,41) ;
(5,13,23,37,43) ; (5,13,23,37,47) ; (5,13,23,41,47) ; (5,13,23,43,47) ; (5,13,29,37,41) ;
(5,13,29,37,43) ; (5,13,29,37,47) ; (5,13,29,41,47) ; (5,13,29,43,47) ; (5,13,31,37,41) ;
(5,13,31,37,43) ; (5,13,31,37,47) ; (5,13,31,41,47) ; (5,13,31,43,47) ; (5,13,37,41,47) ;
(5,13,37,43,47) ; (5,17,23,29,37) ; (5,17,23,29,41) ; (5,17,23,29,43) ; (5,17,23,29,47) ;
(5,17,23,31,37) ; (5,17,23,31,41) ; (5,17,23,31,43) ; (5,17,23,31,47) ; (5,17,23,37,41) ;
(5,17,23,37,43) ; (5,17,23,37,47) ; (5,17,23,41,47) ; (5,17,23,43,47) ; (5,17,29,37,41) ;
(5,17,29,37,43) ; (5,17,29,37,47) ; (5,17,29,41,47) ; (5,17,29,43,47) ; (5,17,31,37,41) ;
(5,17,31,37,43) ; (5,17,31,37,47) ; (5,17,31,41,47) ; (5,17,31,43,47) ; (5,17,37,41,47) ;
(5,17,37,43,47) ; (5,19,23,29,37) ; (5,19,23,29,41) ; (5,19,23,29,43) ; (5,19,23,29,47) ;
(5,19,23,31,37) ; (5,19,23,31,41) ; (5,19,23,31,43) ; (5,19,23,31,47) ; (5,19,23,37,41) ;
(5,19,23,37,43) ; (5,19,23,37,47) ; (5,19,23,41,47) ; (5,19,23,43,47) ; (5,19,29,37,41) ;
(5,19,29,37,43) ; (5,19,29,37,47) ; (5,19,29,41,47) ; (5,19,29,43,47) ; (5,19,31,37,41) ;
(5,19,31,37,43) ; (5,19,31,37,47) ; (5,19,31,41,47) ; (5,19,31,43,47) ; (5,19,37,41,47) ;
(5,19,37,43,47) ; (5,23,29,37,41) ; (5,23,29,37,43) ; (5,23,29,37,47) ; (5,23,29,41,47) ;
(5,23,29,43,47) ; (5,23,31,37,41) ; (5,23,31,37,43) ; (5,23,31,37,47) ; (5,23,31,41,47) ;
(5,23,31,43,47) ; (5,23,37,41,47) ; (5,23,37,43,47) ; (5,29,37,41,47) ; (5,29,37,43,47) ;
(5,31,37,41,47) ; (5,31,37,43,47) ; (7,11,17,23,29) ; (7,11,17,23,31) ; (7,11,17,23,37) ;
(7,11,17,23,41) ; (7,11,17,23,43) ; (7,11,17,23,47) ; (7,11,17,29,37) ; (7,11,17,29,41) ;
(7,11,17,29,43) ; (7,11,17,29,47) ; (7,11,17,31,37) ; (7,11,17,31,41) ; (7,11,17,31,43) ;
(7,11,17,31,47) ; (7,11,17,37,41) ; (7,11,17,37,43) ; (7,11,17,37,47) ; (7,11,17,41,47) ;
(7,11,17,43,47) ; (7,11,19,23,29) ; (7,11,19,23,31) ; (7,11,19,23,37) ; (7,11,19,23,41) ;
(7,11,19,23,43) ; (7,11,19,23,47) ; (7,11,19,29,37) ; (7,11,19,29,41) ; (7,11,19,29,43) ;
(7,11,19,29,47) ; (7,11,19,31,37) ; (7,11,19,31,41) ; (7,11,19,31,43) ; (7,11,19,31,47) ;
(7,11,19,37,41) ; (7,11,19,37,43) ; (7,11,19,37,47) ; (7,11,19,41,47) ; (7,11,19,43,47) ;
(7,11,23,29,37) ; (7,11,23,29,41) ; (7,11,23,29,43) ; (7,11,23,29,47) ; (7,11,23,31,37) ;
(7,11,23,31,41) ; (7,11,23,31,43) ; (7,11,23,31,47) ; (7,11,23,37,41) ; (7,11,23,37,43) ;
(7,11,23,37,47) ; (7,11,23,41,47) ; (7,11,23,43,47) ; (7,11,29,37,41) ; (7,11,29,37,43) ;
(7,11,29,37,47) ; (7,11,29,41,47) ; (7,11,29,43,47) ; (7,11,31,37,41) ; (7,11,31,37,43) ;
(7,11,31,37,47) ; (7,11,31,41,47) ; (7,11,31,43,47) ; (7,11,37,41,47) ; (7,11,37,43,47) ;
(7,13,17,23,29) ; (7,13,17,23,31) ; (7,13,17,23,37) ; (7,13,17,23,41) ; (7,13,17,23,43) ;
(7,13,17,23,47) ; (7,13,17,29,37) ; (7,13,17,29,41) ; (7,13,17,29,43) ; (7,13,17,29,47) ;
(7,13,17,31,37) ; (7,13,17,31,41) ; (7,13,17,31,43) ; (7,13,17,31,47) ; (7,13,17,37,41) ;
(7,13,17,37,43) ; (7,13,17,37,47) ; (7,13,17,41,47) ; (7,13,17,43,47) ; (7,13,19,23,29) ;
(7,13,19,23,31) ; (7,13,19,23,37) ; (7,13,19,23,41) ; (7,13,19,23,43) ; (7,13,19,23,47) ;
(7,13,19,29,37) ; (7,13,19,29,41) ; (7,13,19,29,43) ; (7,13,19,29,47) ; (7,13,19,31,37) ;
(7,13,19,31,41) ; (7,13,19,31,43) ; (7,13,19,31,47) ; (7,13,19,37,41) ; (7,13,19,37,43) ;
(7,13,19,37,47) ; (7,13,19,41,47) ; (7,13,19,43,47) ; (7,13,23,29,37) ; (7,13,23,29,41) ;
(7,13,23,29,43) ; (7,13,23,29,47) ; (7,13,23,31,37) ; (7,13,23,31,41) ; (7,13,23,31,43) ;
(7,13,23,31,47) ; (7,13,23,37,41) ; (7,13,23,37,43) ; (7,13,23,37,47) ; (7,13,23,41,47) ;

$(7,13,23,43,47)$ ; $(7,13,29,37,41)$ ; $(7,13,29,37,43)$ ; $(7,13,29,37,47)$ ; $(7,13,29,41,47)$ ;
$(7,13,29,43,47)$ ; $(7,13,31,37,41)$ ; $(7,13,31,37,43)$ ; $(7,13,31,37,47)$ ; $(7,13,31,41,47)$ ;
$(7,13,31,43,47)$ ; $(7,13,37,41,47)$ ; $(7,13,37,43,47)$ ; $(7,17,23,29,37)$ ; $(7,17,23,29,41)$ ;
$(7,17,23,29,43)$ ; $(7,17,23,29,47)$ ; $(7,17,23,31,37)$ ; $(7,17,23,31,41)$ ; $(7,17,23,31,43)$ ;
$(7,17,23,31,47)$ ; $(7,17,23,37,41)$ ; $(7,17,23,37,43)$ ; $(7,17,23,37,47)$ ; $(7,17,23,41,47)$ ;
$(7,17,23,43,47)$ ; $(7,17,29,37,41)$ ; $(7,17,29,37,43)$ ; $(7,17,29,37,47)$ ; $(7,17,29,41,47)$ ;
$(7,17,29,43,47)$ ; $(7,17,31,37,41)$ ; $(7,17,31,37,43)$ ; $(7,17,31,37,47)$ ; $(7,17,31,41,47)$ ;
$(7,17,31,43,47)$ ; $(7,17,37,41,47)$ ; $(7,17,37,43,47)$ ; $(7,19,23,29,37)$ ; $(7,19,23,29,41)$ ;
$(7,19,23,29,43)$ ; $(7,19,23,29,47)$ ; $(7,19,23,31,37)$ ; $(7,19,23,31,41)$ ; $(7,19,23,31,43)$ ;
$(7,19,23,31,47)$ ; $(7,19,23,37,41)$ ; $(7,19,23,37,43)$ ; $(7,19,23,37,47)$ ; $(7,19,23,41,47)$ ;
$(7,19,23,43,47)$ ; $(7,19,29,37,41)$ ; $(7,19,29,37,43)$ ; $(7,19,29,37,47)$ ; $(7,19,29,41,47)$ ;
$(7,19,29,43,47)$ ; $(7,19,31,37,41)$ ; $(7,19,31,37,43)$ ; $(7,19,31,37,47)$ ; $(7,19,31,41,47)$ ;
$(7,19,31,43,47)$ ; $(7,19,37,41,47)$ ; $(7,19,37,43,47)$ ; $(7,23,29,37,41)$ ; $(7,23,29,37,43)$ ;
$(7,23,29,37,47)$ ; $(7,23,29,41,47)$ ; $(7,23,29,43,47)$ ; $(7,23,31,37,41)$ ; $(7,23,31,37,43)$ ;
$(7,23,31,37,47)$ ; $(7,23,31,41,47)$ ; $(7,23,31,43,47)$ ; $(7,23,37,41,47)$ ; $(7,23,37,43,47)$ ;
$(7,29,37,41,47)$ ; $(7,29,37,43,47)$ ; $(7,31,37,41,47)$ ; $(7,31,37,43,47)$ ; $(11,17,23,29,37)$ ;
$(11,17,23,29,41)$ ; $(11,17,23,29,43)$ ; $(11,17,23,29,47)$ ; $(11,17,23,31,37)$ ; $(11,17,23,31,41)$ ;
$(11,17,23,31,43)$ ; $(11,17,23,31,47)$ ; $(11,17,23,37,41)$ ; $(11,17,23,37,43)$ ; $(11,17,23,37,47)$ ;
$(11,17,23,41,47)$ ; $(11,17,23,43,47)$ ; $(11,17,29,37,41)$ ; $(11,17,29,37,43)$ ; $(11,17,29,37,47)$ ;
$(11,17,29,41,47)$ ; $(11,17,29,43,47)$ ; $(11,17,31,37,41)$ ; $(11,17,31,37,43)$ ; $(11,17,31,37,47)$ ;
$(11,17,31,41,47)$ ; $(11,17,31,43,47)$ ; $(11,17,37,41,47)$ ; $(11,17,37,43,47)$ ; $(11,19,23,29,37)$ ;
$(11,19,23,29,41)$ ; $(11,19,23,29,43)$ ; $(11,19,23,29,47)$ ; $(11,19,23,31,37)$ ; $(11,19,23,31,41)$ ;
$(11,19,23,31,43)$ ; $(11,19,23,31,47)$ ; $(11,19,23,37,41)$ ; $(11,19,23,37,43)$ ; $(11,19,23,37,47)$ ;
$(11,19,23,41,47)$ ; $(11,19,23,43,47)$ ; $(11,19,29,37,41)$ ; $(11,19,29,37,43)$ ; $(11,19,29,37,47)$ ;
$(11,19,29,41,47)$ ; $(11,19,29,43,47)$ ; $(11,19,31,37,41)$ ; $(11,19,31,37,43)$ ; $(11,19,31,37,47)$ ;
$(11,19,31,41,47)$ ; $(11,19,31,43,47)$ ; $(11,19,37,41,47)$ ; $(11,19,37,43,47)$ ; $(11,23,29,37,41)$ ;
$(11,23,29,37,43)$ ; $(11,23,29,37,47)$ ; $(11,23,29,41,47)$ ; $(11,23,29,43,47)$ ; $(11,23,31,37,41)$ ;
$(11,23,31,37,43)$ ; $(11,23,31,37,47)$ ; $(11,23,31,41,47)$ ; $(11,23,31,43,47)$ ; $(11,23,37,41,47)$ ;
$(11,23,37,43,47)$ ; $(11,29,37,41,47)$ ; $(11,29,37,43,47)$ ; $(11,31,37,41,47)$ ; $(11,31,37,43,47)$ ;
$(13,17,23,29,37)$ ; $(13,17,23,29,41)$ ; $(13,17,23,29,43)$ ; $(13,17,23,29,47)$ ; $(13,17,23,31,37)$ ;
$(13,17,23,31,41)$ ; $(13,17,23,31,43)$ ; $(13,17,23,31,47)$ ; $(13,17,23,37,41)$ ; $(13,17,23,37,43)$ ;
$(13,17,23,37,47)$ ; $(13,17,23,41,47)$ ; $(13,17,23,43,47)$ ; $(13,17,29,37,41)$ ; $(13,17,29,37,43)$ ;
$(13,17,29,37,47)$ ; $(13,17,29,41,47)$ ; $(13,17,29,43,47)$ ; $(13,17,31,37,41)$ ; $(13,17,31,37,43)$ ;
$(13,17,31,37,47)$ ; $(13,17,31,41,47)$ ; $(13,17,31,43,47)$ ; $(13,17,37,41,47)$ ; $(13,17,37,43,47)$ ;
$(13,19,23,29,37)$ ; $(13,19,23,29,41)$ ; $(13,19,23,29,43)$ ; $(13,19,23,29,47)$ ; $(13,19,23,31,37)$ ;
$(13,19,23,31,41)$ ; $(13,19,23,31,43)$ ; $(13,19,23,31,47)$ ; $(13,19,23,37,41)$ ; $(13,19,23,37,43)$ ;
$(13,19,23,37,47)$ ; $(13,19,23,41,47)$ ; $(13,19,23,43,47)$ ; $(13,19,29,37,41)$ ; $(13,19,29,37,43)$ ;
$(13,19,29,37,47)$ ; $(13,19,29,41,47)$ ; $(13,19,29,43,47)$ ; $(13,19,31,37,41)$ ; $(13,19,31,37,43)$ ;
$(13,19,31,37,47)$ ; $(13,19,31,41,47)$ ; $(13,19,31,43,47)$ ; $(13,19,37,41,47)$ ; $(13,19,37,43,47)$ ;
$(13,23,29,37,41)$ ; $(13,23,29,37,43)$ ; $(13,23,29,37,47)$ ; $(13,23,29,41,47)$ ; $(13,23,29,43,47)$ ;
$(13,23,31,37,41)$ ; $(13,23,31,37,43)$ ; $(13,23,31,37,47)$ ; $(13,23,31,41,47)$ ; $(13,23,31,43,47)$ ;
$(13,23,37,41,47)$ ; $(13,23,37,43,47)$ ; $(13,29,37,41,47)$ ; $(13,29,37,43,47)$ ; $(13,31,37,41,47)$ ;
$(13,31,37,43,47)$ ; $(17,23,29,37,41)$ ; $(17,23,29,37,43)$ ; $(17,23,29,37,47)$ ; $(17,23,29,41,47)$ ;
$(17,23,29,43,47)$ ; $(17,23,31,37,41)$ ; $(17,23,31,37,43)$ ; $(17,23,31,37,47)$ ; $(17,23,31,41,47)$ ;
$(17,23,31,43,47)$ ; $(17,23,37,41,47)$ ; $(17,23,37,43,47)$ ; $(17,29,37,41,47)$ ; $(17,29,37,43,47)$ ;
$(17,31,37,41,47)$ ; $(17,31,37,43,47)$ ; $(19,23,29,37,41)$ ; $(19,23,29,37,43)$ ; $(19,23,29,37,47)$ ;
$(19,23,29,41,47)$ ; $(19,23,29,43,47)$ ; $(19,23,31,37,41)$ ; $(19,23,31,37,43)$ ; $(19,23,31,37,47)$ ;
$(19,23,31,41,47)$ ; $(19,23,31,43,47)$ ; $(19,23,37,41,47)$ ; $(19,23,37,43,47)$ ; $(19,29,37,41,47)$ ;
$(19,29,37,43,47)$ ; $(19,31,37,41,47)$ ; $(19,31,37,43,47)$.

4. On utilise uniquement les jetons 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8.
   (a) Quels sont tous les sacs jolis de deux jetons que l'on peut constituer ?
   On peut former les 13 sacs jolis suivants : (2, 8), (7, 8), (3, 4), (4, 5), (4, 8), (1, 7), (6, 7), (2, 6), (2, 3), (1, 5), (3, 7), (1, 2), (5, 6).
   (b) Prouver que si un sac joli contient le jeton 2, alors il contient exactement deux jetons.
   D'après la question précédente, un sac joli contenant le jeton 2 contient l'un des jetons suivants : 1, 3, 6 ou 8. Or les nombres $3-1=2$, $6-1=5$, $8-1=7$, $6-3=3$, $8-3=5$ et $8-6=2$ sont tous premiers. Donc si un sac joli contient le jeton 2, alors il contient exactement deux jetons.
   (c) Prouver que si un sac joli ne contient pas le jeton 2, alors il contient exactement deux jetons.
   Par disjonction de cas :
   - si un tel sac contient le jeton 1, alors il contient l'un des jetons suivants : 7 ou 5. Mais $7-5=2$ est un nombre premier.
   - si un tel sac contient le jeton 3, alors il contient l'un des jetons suivants : 4, 7. Mais $7-4=3$ est un nombre premier.
   - si un tel sac contient le jeton 4, alors il contient l'un des jetons suivants : 3, 5, 8. Mais $5-3=2$, $8-5=3$ et $8-3=5$ sont des nombres premiers.
   - si un tel sac contient le jeton 5, alors il contient l'un des jetons suivants : 4, 1, 6. Mais $6-4=2$, $6-1=5$ et $4-1=3$ sont des nombres premiers.
   - si un tel sac contient le jeton 6, alors il contient l'un des jetons suivants : 7 ou 5. Mais $7-5=2$ est un nombre premier.
   - si un tel sac contient le jeton 7, alors il contient l'un des jetons suivants : 8, 1, 6, 3. Mais $8-1=7$, $8-6=2$, $8-3=5$, $6-1=5$, $6-3=3$, $3-1=2$ sont des nombres premiers.
   - si un tel sac contient le jeton 8, alors il contient l'un des jetons suivants : 4, 7. Mais $7-4=3$ est un nombre premier.

   (d) Est-il possible de constituer un sac joli avec trois jetons ?
   Non car si un sac joli contient le jeton 2, alors il contient exactement deux jetons et s'il ne contient pas le jeton 2, alors il contient exactement deux jetons. Dans tous les cas, un sac joli avec les jetons 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, et 8 contient exactement deux jetons.