CORRIGE METROPOLE

Exercice 1 (à traiter par tous les candidats)

PLUS FORT !

1. ***a.*** $[8,1,\mathbf{7},6,5,2,\mathbf{3},\mathbf{4}]$ est une autre liste de longueur 8 et de score 3.

   b. Les listes de longueurs 3 sont $[1,\mathbf{2},\mathbf{3}]$, $[1,\mathbf{3},2]$, $[2,1,\mathbf{3}]$, $[2,\mathbf{3},1]$, $[3,1,\mathbf{2}]$, $[3,2,1]$ et les scores associés sont respectivement $2, 1, 1, 1, 1, 0$.

2.

```
def score(n):
  '''renvoie le score d'une liste L de longueur n'''
  S=0
  for k in range(n-1):
    if L[k+1]>L[k]:
      S=S+1
  return S
```

3. Le score est un nombre positif ou nul et le joueur marque 0 point avec la liste $[n, n-1, \dots, 2,1]$.
Dans le meilleur des cas, toutes les cartes sont dans l'ordre croissant et la liste $[1,\mathbf{2},\dots,\boldsymbol{n}]$ apporte le nombre maximal de points qui est $n-1$.

4. ***a.*** La liste $[1,\mathbf{2},..,\boldsymbol{k},\boldsymbol{n},n-1,..,k+1]$ a pour score k et est de longueur n donc il existe au moins une liste de longueur n et de score k.

b. La liste $[n-1,..,k+1,1,\mathbf{2},..,\boldsymbol{k},\boldsymbol{n}]$ est différente de la précédente et donne aussi k points donc, pour tout k entre 1 et $n-2$, on peut trouver deux listes de longueur n et de score k.

5. La première liste donnée dans la question **2.** est la seule de longueur n et de score 0 (les nombres doivent tous être rangés dans l'ordre décroissant. De même, la deuxième liste donnée dans la question **2.** est la seule de longueur n et de score $n-1$, donc $L_n(0) = L_n(n-1) = 1$.
6. ***a.*** En appliquant le résulta de la question précédente à $n = 3$, $L_3(0) = L_3(2) = 1$.
   Les listes de longueurs 3 sont $[1,\mathbf{2},\mathbf{3}]$, $[1,\mathbf{3},2]$, $[2,1,\mathbf{3}]$, $[2,\mathbf{3},1]$, $[3,1,\mathbf{2}]$, $[3,2,1]$ et on en déduit $L_3(1) = 4$.
   On remarque que $[3,1,\mathbf{2}]$ rapporte 1 point. Parmi les 4 possibilités d'insertion du 4, les listes dont le score est toujours 1 sont $[\mathbf{4},3,1,2]$ et $[3,1,\mathbf{4},2]$.

   b. La liste $[3,2,1]$ a pour score 0. On obtient une liste ayant encore le score 0 uniquement en insérant le n°4 au début, ce qui donne la liste $[\mathbf{4},3,2,1]$.

   c. Toute liste de longueur 4 et de score 1 ne peut être obtenue que par insertion du n°4 dans une liste de longueur 3 et de score 0 ou 1. En effet, insérer 4 à la liste $[1,\mathbf{2},\mathbf{3}]$ donnera une liste de score 2 au moins.
   Pour chaque liste de longueur 3 et score 1, il y a deux possibilités d'insertion du n°4, ce qui fait 2 $L_3(1)$ telles listes possibles.
   À cela on ajoute les 3 possibilités obtenues à partir de la liste de longueur 3 et score 0, ce qui ajoute 3 $\boldsymbol{L_3}(0)$ listes possibles.
   On obtient donc bien $L_4(1) = 2L_3(1) + L_3(0)$.

   d. On construit une liste de longueur $n+1$ et score 1 à partir d'une liste de longueur n et score 0 ou 1, en insérant le n° $n+1$ judicieusement.
   Remarquons d'abord que la position 1 ne rapporte pas de point.

Dans une liste de longueur n et score 1, on peut insérer le n° $n+1$ soit au tout début (en position 1), soit juste avant le numéro marquant l'unique point (position au moins 2). Ces deux positions sont distinctes, et ce sont les seules possibles, ce qui fait $2\, L_{\boldsymbol{n}}(1)$ listes de ce type.
Dans une liste de longueur n et de score 0, on peut insérer le n° $n+1$ n'importe où sauf au tout début, la liste obtenue rapportera bien 1 point. Il y a donc n positions possibles pour ce numéro $n+1$, ce qui fait $n\, L_{\boldsymbol{n}}(0)$ listes de ce type.
Enfin, insérer $n+1$ à une liste de longueur n et de score supérieur ou égal à 2 donnera une liste de score supérieur ou égal à 2 : en effet, si on l'insère en queue, cela augmentera le score d'une unité, et sinon, cela conservera le score initial.
On trouve donc bien $L_{n+1}(1) \ = 2L_n(1) + nL_n(0)$.

e. On a $L_{n+1}(k) = (k+1)L_{\boldsymbol{n}}(k) + (n+1-k)L_{\boldsymbol{n}}(k-1)$. En effet :

- Si on insère le n° $n+1$ dans une liste de longueur n et score k, la nouvelle liste a encore un score de k si et seulement si l'insertion s'est faite en position 1, ou juste avant un numéro qui marquait un point, ce qui fait $k+1$ possibilités.
- Si on insère le n° $n+1$ dans une liste de longueur n et score $k-1$, la nouvelle liste a un score de k si et seulement si l'insertion s'est faite dans l'une des positions non évoquées ci-dessus, ce qui donne $n+1-k$ possibilités.
- Enfin, comme précédemment, insérer $n+1$ à une liste de score strictement inférieur à $k-1$, ou strictement supérieur à k, ne conduira jamais à une nouvelle liste de score k.

f. On obtient, grâce aux questions précédentes :

	$\boldsymbol{k=0}$	$\boldsymbol{k=1}$	$\boldsymbol{k=2}$	$\boldsymbol{k=3}$	$\boldsymbol{k=4}$
$\boldsymbol{n=3}$	1	4	1		
$\boldsymbol{n=4}$	1	11	11	1	
$\boldsymbol{n=5}$	1	26	66	26	1

Exercice 2 (à traiter par les candidats suivant l'enseignement de spécialité de la voie générale)

UNE DESCENTE INFINIE

Partie 1.

1. $b = -(r_1 + r_2)$ et $c = r_1 r_2$.
2. $c \geq 0$ donc r_1 et r_2 sont de même signe. $b \leq 0$ est négatif donc la somme de r_1 et r_2 est positive. On en déduit donc que r_1 et r_2 sont positifs.

Partie 2.

1. ***a.*** Comme (x_1, x_2, x_3) solution de l'équation (1), on a $|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \alpha x_1 x_2 x_3$.
   Or $\alpha > 0$ et $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq 0$ donc $x_1 x_2 x_3 \geq 0$.
   Ainsi $|x_1||x_2||x_3| = |x_1 x_2 x_3| = x_1 x_2 x_3$ et $(|x_1|, |x_2|, |x_3|)$ est aussi solution de l'équation (E).
   b. Si (x_1, x_2, x_3) est triplet d'entiers relatifs différent de (0,0,0) solution de l'équation (1), alors d'après la question précédente, $(|x_1|, |x_2|, |x_{3|})$ solution triplet d'entiers naturels de l'équation (1) différent de $(0,0,0)$.
2. Par commutativité du produit et de la somme, le triplet (x_2, x_1, x_3) est alors aussi solution de l'équation (E).
3. Si l'équation (E) admet une solution (x_2, x_1, x_3) différente de $(0,0,0)$, d'après la question 1b., on obtient un triplet de nombres entiers naturels différents de $(0,0,0)$ et solution de (E). Puis, d'après la question 2., en et en la généralisant d'autres permutations du triplet), on obtient une solution (x_1, x_2, x_3) différente du triplet $(0,0,0)$ telle que $x_1 \leq x_2 \leq x_3$.

Partie 3.

1. On sait déjà que $x_1 \geq 0$. Si $x_1 = 0$, alors le membre de droite de l'égalité est nul et donc $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$, les x_i sont donc tous nuls et la seule solution est le triplet $(0,0,0)$, ce qui est contraire à l'hypothèse.
2.
   a. (x_1, x_2, y) est solution si et seulement si $x_1^2 + x_2^2 + y^2 = \alpha x_1 x_2 y$ c'est-à-dire y est racine de Q.
   b. x_3 est une racine de Q.
   c. On écrit $Q(x_2) = (x_2^2 - \alpha x_1 x_2^2) + (x_1^2 + x_2^2\ ) = (2x_2^2 + x_2^2\ \ - \alpha x_1 x_2^2) + (x_1^2 + x_2^2 - 2x_2^2)$ d'où le résultat.
   On sait que x_1, x_2 sont des entiers non nuls donc supérieurs ou égaux à 1, d'où $3 - \alpha x_1 \mathrm{x}_2 \leq 3 - \alpha < 0$ et $x_2^2 > 0$ donc $(3 - \alpha x_1 x_2) x_2^2 < 0$ et on a $0 < x_1 \leq x_2$ donc donc $x_1^2 - x_2^2 \leq 0$.
   D'où en sommant $Q(x_2) < 0$.
   d. $Q(0) = x_1^2 + x_2^2$ et $0 < x_1 \leq x_2$ donc $Q(0) > 0$.
   e. $Q(x_2) < 0$ donc la fonction polynôme du second degré Q change se signe sur **R**. On en déduit que l'équation $Q(x) = 0$ possède exactement deux solutions distinctes réelles. On connaît x_3. On note y l'autre solution.
   La fonction polynôme Q est positive à l'extérieur des racines et négative à l'intérieur. Donc, comme $Q(x_2) < 0$, x_2 est entre ces racines (strictement). Comme $x_2 \leq x_3$, on en déduit que $y < x_2 < x_3$.
   On sait que $Q(0) > 0$, donc 0 est à l'extérieur des racines donc soit inférieur strictement à y soit strictement supérieur à x_3. Mais comme $0 < x_2$, on en conclut que $0 < y < x_2 < x_3$.
   f. D'après la partie **1.**, $y + x_3 = \alpha x_1 x_2$ qui est un entier comme produit d'entiers. Comme x_3 est un entier, y est un entier. Il est naturel d'après la question **e.**.
3. En réitérant ce procédé sur le triplet (x_1, x_2, y) (réordonné dans l'ordre croissant) au lieu de (x_1, x_2, x_3), on obtient un triplet d'entiers distincts de (0,0,0) dont le max a encore strictement décru .
   On obtient ainsi une suite strictement décroissante d'entier naturels y_n, ce qui est impossible. Ainsi, il n'existe pas de triplet d'entiers naturels $(x_1, x_2, x_3\ )$ différent de (0,0,0), solution de (E) tel que $x_1 \leq x_2 \leq x_3$.
4. Par l'absurde, s'il existait un triplet d'entiers relatifs $(x_1, x_2, x_3\ )$ différent de (0,0,0), solution de (E), alors, d'après la question **3.** de la partie 2, il existerait un triplet d'entiers naturels $(x_1, x_2, x_3\ )$ différent de (0,0,0), solution de (E) tel que $x_1 \leq x_2 \leq x_3$, ce qui est impossible d'après la question précédente.
5. On généralise le raisonnement en considérant d'abord le polynôme $Q(x) = x^2 - \alpha x_1 \dots x_{n-1} x + \ x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2$, en montrant que $Q(x_{n-1}) = (n - \alpha x_1 \dots x_{n-2}) x_{n-1}^2 + (x_1^2 + \cdots + x_{n-2}^2 - (n-2) x_{n-1}^2)$ d'où on déduit $Q(x_{n-1}) > 0$ alors qu'on a $Q(0) > 0$.

Exercice 3 (à traiter par les candidats ne suivant pas l'enseignement de spécialité de la voie générale)

CODES DÉTECTEURS ET CORRECTEURS

Question préliminaire

1. Si a et b sont tous les deux pairs, alors il existe deux entiers k et l tels que $a = 2k$ et $b = 2l$ d'où $a + b = 2(k + l)$ et $a + b$ est pair.
   Si a et b sont tous les deux impairs, alors il existe deux entiers k et l tels que $a = 2k + 1$ et $b = 2l + 1$ d'où $a + b = 2(k + l + 1)$ et $a + b$ est pair.
   Réciproquement, si a est pair et b est impair, alors il existe deux entiers k et l tels que $a = 2k$ et $b = 2l + 1$ d'où $a + b = 2(k + l) + 1$ et $a + b$ est impair. Le raisonnement est le même si a est impair et b est pair.
   Le nombre $a + b$ est donc bien pair si et seulement si a et b sont de même parité.

Codage d'un message

2. ***a***. Le quadruplet $(1,0,0,1)$ code le message $M = 1 + 8 = 9$.
   b. $10 = 2 + 8$ donc le quadruplet $(0,1,0,1)$ code le message $M = 10$ et $15 = 1 + 2 + 4 + 8$ donc le quadruplet $(1,1,1,1)$ code le message $M = 15$.
   c. On ne peut trouve r de code pour représenter $M = 20$ car le plus grand message est celui obtenu avec le quadruplet $(1,1,1,1)$soit 20.
   d. Les différents messages possibles sont : $0, 1, 2, 3, \dots, 15$ soit tous les entiers de 0 à 15.

Codage d'un message avec protection contre les erreurs.

3. ***a.*** $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 + 1 = 2$ qui est pair donc $y = 0$.
   b. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 + 1 + 1 = 3$, qui est impair. On devrait donc avoir $y = 1$. Le code a donc été corrompu.
   c. Dans le cas où un seul bit est faux, on peut détecter l'altération puisque si l'on change la parité d'un seul terme d'une somme, on change la parité de la somme mais on ne peut la localiser parmi les trois termes de la somme.
   Dans le cas où deux bits sont faux, on ne pourra pas détecter l'altération d'après la question préliminaire.
4. ***a.*** $x_1 + x_2 + x_3 = 1 + 0 + 0 = 1$ qui est impair donc $y_1 = 1$, $x_2 + x_3 + x_4 = 0 + 0 + 1 = 1$, qui est impair donc $y_2 = 1$ et $x_1 + x_3 + x_4 = 1 + 0 + 1 = 2$ qui est pair donc $y_3 = 0$.
   b. Pour le quadruplet $(1,1,0,1,0,0,1)$, on a bien $y_1 = 0$ car $x_1 + x_2 + x_3 = 1 + 1 + 0 = 2$ qui est pair et $y_2 = 0$ car $x_2 + x_3 + x_4 = 1 + 0 + 1 = 2$ qui est pair mais $x_1 + x_3 + x_4 = 1 + 0 + 1 = 2$ qui est pair et on devrait donc avoir $y_3 = 0$ ce qui n'est pas le cas. On est donc certain d'une altération de transmission pour l'heptuplet $(1,1,0,1,0,0,1)$.
   c. Si on est sûr de la justesse des bits de contrôles, et dans le cas où un seul des bits d'information est erroné, nécessairement deux des sommes $x_1 + x_2 + x_3$, $x_2 + x_3 + x_4$, $x_1 + x_3 + x_4$ ont une mauvaise parité par rapport aux y_1, y_2, y_3. Le bit d'information à changer est celui qui ne figure pas dans la somme ayant la bonne parité.
   Si on est sûr de la justesse des bits de contrôles, et dans le cas où exactement deux des quatre bits d'information sont erronés, leur somme a pour autant la bonne parité (puisqu'on ne change pas la parité d'une somme de deux entiers si on change la parité de ces deux entiers). Les deux bits d'information à changer sont donc ceux qui figurent ensemble dans la somme ayant la bonne parité mais seuls dans chacune des autres sommes.