Olympiades nationales de mathématiques 2023

Spécialité mathématiques

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE LA JEUNESSE ET DES SPORTS
Liberté Égalité Fraternité

ACADÉMIE DE NICE
Liberté Égalité Fraternité

Académie de Nice

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie («exercices nationaux»). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie («exercices académiques»). Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercices académiques

Résolution en équipe

Les candidats traitent **les deux exercices**.

UNIVERSITÉ CÔTE D'AZUR
Inria INVENTEURS DU MONDE NUMÉRIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY
Animath Association pour l'animation mathématique
Google
hp
TEXAS INSTRUMENTS
CASIO
NUMWORKS
Crédit Mutuel Enseignant
WOLFRAM COMPUTATION MEETS KNOWLEDGE

Exercice 1 - Blocs arithmétiques

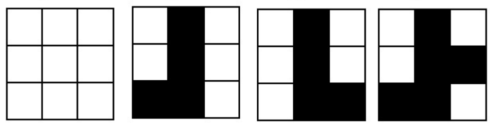
Dans tout l'exercice, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On appelle *Bloc* de taille n tout quadrillage blanc de n lignes et n colonnes dont certaines cases sont colorées en noir en respectant la règle suivante :

si une case est noire, alors toutes les cases qui sont en dessous de celle-ci sont noires.

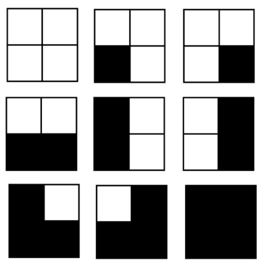
Par exemple, les figures 1, 2 et 3 sont des *Blocs* différents de taille 3. La figure 4 n'est pas un *Bloc* de taille 3.

Figure 1 Figure 2 Figure 3 Figure 4



Remarquons qu'une fois dessiné, on ne retourne pas un *Bloc*.

1. Tracer sur la copie tous les *Blocs* de taille 2.



2. Combien y a-t-il de *Blocs* de taille 6 ?
   Il y en a $7^6 = 117649$.

On rappelle que :

- Un nombre premier est un nombre entier positif ayant exactement deux diviseurs positifs : 1 et lui-même. Les six premiers nombres premiers sont 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13.
- Tout nombre entier naturel supérieur ou égal à 2, s'il n'est pas premier, peut se décomposer en produit de facteurs premiers. Dans ce cas, la décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.

À chaque case d'un *Bloc* de taille n, on associe :

- le nombre 1 si la case est blanche ;
- le k-ième nombre premier si la case est noire et se trouve dans la k-ième colonne du *Bloc*.

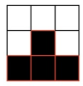
Ainsi, à tout *Bloc* de taille n, on associe un unique nombre entier naturel i égal au produit des nombres associés à ses n^2 cases.

Dans toute la suite de l'exercice, on notera $B_{i,n}$ le bloc de taille n auquel on associe ce nombre i.

Par exemple :

- le nombre $1^9 = 1$ est associé au *Bloc* de la figure 1 : ce *Bloc* est noté $B_{1,3}$;
- le nombre $1^5 \times 2^1 \times 3^3 = 54$ est associé au *Bloc* de la figure 2 : ce *Bloc* est noté $B_{54,3}$.

3. Tracer le *Bloc* $B_{90,3}$ de taille 3 auquel est associé le nombre 90.
   Comme $90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5$, le *Bloc* $B_{90,3}$ est :

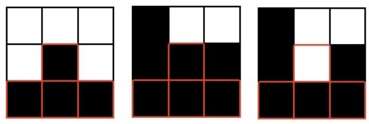


4. Le nombre 2 500 est-il associé à un *Bloc* de taille 3 ?
   Comme $2500 = 2^2 \times 5^4$ le nombre 2 500 n'est pas associé à un *Bloc* de taille 3.
5. Quel est le plus grand nombre associé à un *Bloc* de taille 3 ?
   C'est le nombre $2^3 \times 3^3 \times 5^3 = 27000$.

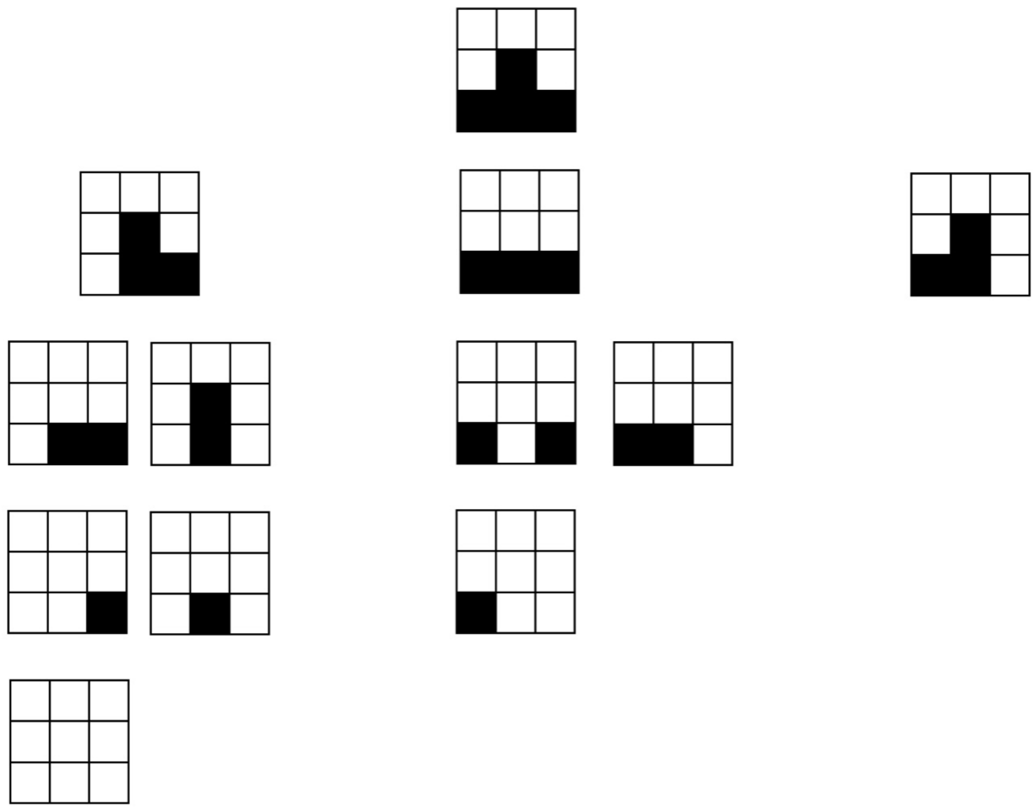
Soient i et j deux entiers associés à deux *Blocs* de taille n. On dit que $B_{i,n}$ se pose sur $B_{j,n}$ si toutes les cases noires de $B_{i,n}$ sont également colorées en noir sur $B_{j,n}$.

Par exemple, le *Bloc* de la figure 5 se pose sur celui de la figure 6 mais pas sur celui de la figure 7.

Figure 5 Figure 6 Figure 7



6. (a) Tracer tous les *Blocs* qui se posent sur celui de la figure 5. Pour cela, on pourra utiliser les quadrillages de l'annexe 1.



(b) Quels sont les nombres associés à ces *Blocs* ?

Les nombres associés sont 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 9 ; 10 ; 15 ; 18 ; 30 ; 45 ; 90. Ce sont tous les diviseurs de 90.

7. Soient i et j deux entiers naturels associés à deux *Blocs* de taille n.

(a) Démontrer que si $B_{i,n}$ se pose sur $B_{j,n}$ alors le nombre i divise j.

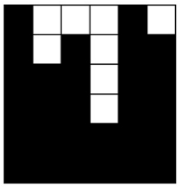
i est le produit des nombres associés aux cases de $B_{i,n}$ et j est le produit des nombres associés aux cases de $B_{j,n}$. Or toutes les cases noires de $B_{i,n}$ sont des cases noires pour $B_{j,n}$ donc $j = i \times h$ où h est le produit des nombres associés aux cases noires de $B_{j,n}$ qui sont blanches sur $B_{i,n}$. Donc i divise j.

(b) Réciproquement, démontrer que si i divise j alors $B_{i,n}$ se pose sur $B_{j,n}$.

Si $i = 1$, le *Bloc* associé à i se pose sur n'importe quel bloc car il ne comporte que des cases blanches.

Si i **est un nombre premier ou un produit de facteurs premiers** qui divise j alors il existe un entier naturel h tel que $j = i \times h$. La plus grande puissance d'un nombre premier qui divise i divise également j : par conséquent, toutes les cases de $B_{i,n}$ noires de la colonne de ce nombre premier sont également colorées en noir sur $B_{j,n}$.

(c) Déterminer le nombre de diviseurs positifs du nombre associé au *Bloc* de taille 6 ci-dessous :



La question revient à dénombrer le nombre de *Blocs* qui se posent sur ce *Bloc* de taille 6. Il y en a $7 \times 5 \times 6 \times 3 \times 7 \times 6 = 26460$

(d) Trouver tous les nombres associés à des *Blocs* de taille 3 et qui ont exactement 18 diviseurs positifs.

Comme $18 = 2 \times 3 \times 3$, ce sont tous les nombres associés à un *Bloc* ayant une colonne avec une case noire et deux colonnes avec 2 cases noires. Il y en a 3 : $2 \times 3^2 \times 5^2 = 450$, $2^2 \times 3 \times 5^2 = 300$ et $2^2 \times 3^2 \times 5 = 180$.

(e) Combien de nombres associés à des *Blocs* de taille 3 ont exactement cinq diviseurs positifs ?

5 est un nombre premier. Les nombres cherchés sont associés à des *Blocs* dont l'une des colonnes comporte 4 cases noires. C'est impossible avec des *Blocs* de taille 3. Il n'y a donc pas de nombres associés à des *Blocs* de taille 3 qui ont exactement 5 diviseurs.

Un *Bloc* est un *Bloc miroir* s'il admet au moins un axe de symétrie.

Par exemple, le *Bloc* de la figure 8 est un *Bloc miroir* mais pas celui de la figure 9.

Figure 8

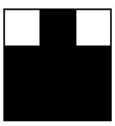
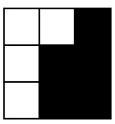


Figure 9



8. Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

(a) Il existe un *Bloc miroir* de taille 3 ayant au moins deux axes de symétrie.

Vrai : par exemple le *Bloc* $B_{1,3}$ ou $B_{27000,3}$.

(b) Le *Bloc* $B_{270,3}$ est un *Bloc miroir*.

Vrai : $270 = 2 \times 3^3 \times 5$.

(c) Il existe au moins 20 *Blocs miroirs* de taille 3.

Vrai : il y en a exactement 32. Les nombres associés à ces blocs sont 1, 2, 3, 5, 8, 9, 10, 12, 27, 30, 36, 75, 90, 100, 120, 125, 216, 225, 270, 300, 360, 750, 900, 1000, 2250, 2700, 3000, 3375, 5400, 9000, 13500, 27000.

(d) Il existe un *Bloc miroir* de taille 3 dont le nombre associé a exactement 36 diviseurs.

Vrai : il s'agit du *Bloc* $B_{2700,3}$.

(e) Pour tout nombre entier naturel k non nul, il existe un *Bloc miroir* dont le nombre associé admet exactement k diviseurs.

Vrai : on peut par exemple considérer le *Bloc* de taille $2k + 1$ dans lequel la $(k + 1)$-ième colonne a exactement $k - 1$ cases colorées en noir.

Exercice 2 - Des nombres en spirale

En écrivant les nombres entiers positifs non nuls en spirale on voit apparaître une infinité d'anneaux concentriques.

Sur l'anneau 1 figurent les nombres entiers de 2 à 9, sur l'anneau 2 les nombres entiers de 10 à 25, sur l'anneau 3 les nombres entiers de 26 à 49, ...

65	64	63	62	61	60	59	58	57
66	37	36	35	34	33	32	31	56
67	38	17	16	15	14	13	30	55
68	39	18	5	4	3	12	29	54
69	40	19	6	1	2	11	28	53
70	41	20	7	8	9	10	27	52
71	42	21	22	23	24	25	26	51
72	43	44	45	46	47	48	49	50
73	74	75	76	77	78	79	80	81

Partie A - D'anneaux en anneaux

L'anneau 1 est formé de huit entiers naturels.

1. Combien de nombres entiers forment l'anneau 2 ?
   $8 \times 2 = 16$
2. Combien de nombres entiers forment l'anneau 3 ?
   $8 \times 3 = 24$
3. Combien de nombres entiers forment l'anneau 6 ?
   $8 \times 6 = 48$
4. Pour n non nul fixé, combien de nombres entiers forment l'anneau n ?
   $8n$

Partie B - Des polynômes générateurs de diagonales

On s'intéresse aux suites croissantes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres entiers appartenant à des anneaux consécutifs de la spirale et alignés en diagonale.

La figure ci-contre donne un exemple d'une telle suite avec $u_0 = 22$, $u_1 = 44$ et $u_2 = 74$.

Dans cet exercice, on pourra utiliser, sans démonstration, la formule donnant la somme des entiers naturels compris entre 1 et n, où n est un entier naturel non nul : $1 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

-	-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	15	14	13	-	-
-	-	-	5	4	3	12	-	-
-	-	-	6	1	2	11	-	-
-	-	-	7	8	9	10	-	-
-	-	-	u_0	-	-	-	-	-
-	-	u_1	-	-	-	-	-	-
-	u_2	-	-	-	-	-	-	-

1. **Diagonale 1**
   La suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 4n^2 + 12n + 7$ génère une diagonale de cette spirale. Combien de nombres premiers peut-on compter parmi les cinq premiers nombres entiers de cette spirale ? Quels sont-ils ? Expliquer.
   $u_0 = 7$, $u_1 = 23$, $u_2 = 47$, $u_3 = 79$, $u_4 = 119$. Ces entiers sont tous des nombres premiers sauf $u_4 = 119$ car $119 = 7 \times 17$.

2. **Diagonale 2**

   Soit la suite de nombres entiers alignés en diagonale de la spirale $u_0 = 1$, $u_1 = 9$, $u_2 = 25$, $u_3 = 49$, $u_4 = 81$... Pour tout entier naturel n, donner l'expression de u_n en fonction de n. Aucune justification n'est attendue.

   $u_n = (2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$

3. **Diagonale 3**
Soit la suite de nombres entiers alignés en diagonale de la spirale $u_0 = 4$, $u_1 = 16$, $u_2 = 36$, $u_3 = 64$, ... On admet qu'il existe trois nombres entiers naturels a, b, c tels que, pour tout entier naturel n, le terme u_n de cette suite peut s'écrire sous la forme suivante : $u_n = an^2 + bn + c$. Déterminer les nombres a, b, c.
$u_n = (2n+2)^2 = 4n^2 + 8n + 4$. En effet :
$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_1 = 16 \\ u_2 = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 4 \\ a + b + c = 16 \\ 4a + 2b + c = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 4 \\ a + b = 12 \\ 2a + b = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 4 \\ a = 4 \\ b = 8 \end{cases}$$

4. **Généralisation**
Pour tout entier naturel n non nul, on pose $v_n = u_n - u_{n-1}$ et on admet que $v_{n+1} = v_n + 8$.
   (a) Pour tout entier naturel n non nul, exprimer v_n en fonction de n et de v_1.
   La suite v est arithmétique de raison 8 et de premier terme v_1. Par conséquent, $v_n = v_1 + 8(n-1)$.
   (b) Démontrer que pour tout entier naturel n on a : $u_n - u_0 = 4n(n-1) + nv_1$.
   Nous avons :
   $v_n = v_1 + 8(n-1)$ s'écrit $u_n - u_{n-1} = v_1 + 8(n-1)$
   $v_{n-1} = v_1 + 8(n-2)$ s'écrit $u_{n-1} - u_{n-2} = v_1 + 8(n-2)$
   ...
   $v_2 = v_1 + 8$ s'écrit $u_2 - u_1 = v_1 + 8$
   v_1 s'écrit $u_1 - u_0 = v_1$
   Par sommation :
   $u_n - u_0 = n \times v_1 + 8 \times ((n-1) + (n-2) + ... + 1) = n \times v_1 + 8 \times \frac{n(n-1)}{2} = nv_1 + 4n(n-1)$.
   (c) En déduire qu'il existe deux entiers naturels d et e tels que, pour tout entier naturel n, le terme u_n de la suite peut s'écrire sous la forme $u_n = 4n^2 + dn + e$. Exprimer d et e en fonction de u_0 et u_1.
   $u_n - u_0 = nv_1 + 4n(n-1)$
   $u_n = n(u_1 - u_0) + 4n^2 - 4n + u_0$
   $u_n = 4n^2 + (u_1 - u_0 - 4)n + u_0$
   (d) i. Trouver l'expression de u_n qui génère la diagonale de la spirale commençant par les nombres premiers $u_0 = 5$ et $u_1 = 19$.
   $u_n = 4n^2 + (u_1 - u_0 - 4)n + u_0 = 4n^2 + (19 - 5 - 4)n + 5 = 4n^2 + 10n + 5$
   ii. Jusqu'à quel rang n les nombres entiers ainsi générés sont-ils premiers ? Expliquer.
   Les entiers générés sont des nombres premiers jusqu'au rang 4 : $u_0 = 5$, $u_1 = 19$, $u_2 = 41$, $u_3 = 71$, $u_4 = 109$. En revanche, $u_5 = 155 = 5 \times 31$ n'est pas premier.

Partie C - Un anneau pour une année

1. Quel est le numéro de l'anneau de la spirale sur lequel est situé le nombre 2023 ? Expliquer.
Pour $n = 22$, $(2n+1)^2 = 2025$ et $(2n+1)^2 - 8n + 1 = 1850$. Les entiers de 1850 à 2025 se trouvent sur l'anneau 22. Donc 2023 se trouve sur l'anneau 22.
2. Quel est le plus petit nombre entier situé sur cet anneau ? Quel est le plus grand nombre entier situé sur cet anneau ?
Le plus petit nombre situé sur cet anneau est 1850. Le plus grand est 2025.