

Académie de Nice

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie («exercices nationaux»). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie («exercices académiques»). Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercices académiques

Résolution en équipe

Les candidats traitent **les deux exercices**.



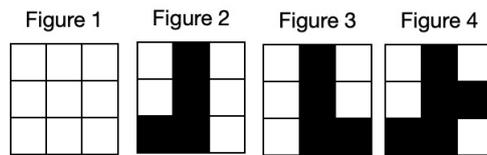
Exercice 1 - Blocs arithmétiques

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On appelle *Bloc* de taille n tout quadrillage blanc de n lignes et n colonnes dont certaines cases sont colorées en noir en respectant la règle suivante :

si une case est noire, alors toutes les cases qui sont en dessous de celle-ci sont noires.

Par exemple, les figures 1, 2 et 3 sont des *Blocs* différents de taille 3. La figure 4 n'est pas un *Bloc* de taille 3.



Remarquons qu'une fois dessiné, on ne retourne pas un *Bloc*.

1. Tracer sur la copie tous les *Blocs* de taille 2.
2. Combien y a-t-il de *Blocs* de taille 6 ?

On rappelle que :

- Un nombre premier est un nombre entier positif ayant exactement deux diviseurs positifs : 1 et lui-même. Les six premiers nombres premiers sont 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13.
- Tout nombre entier naturel supérieur ou égal à 2, s'il n'est pas premier, peut se décomposer en produit de facteurs premiers. Dans ce cas, la décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.

À chaque case d'un *Bloc* de taille n , on associe :

- le nombre 1 si la case est blanche ;
- le k -ième nombre premier si la case est noire et se trouve dans la k -ième colonne du *Bloc*.

Ainsi, à tout *Bloc* de taille n , on associe un unique nombre entier naturel i égal au produit des nombres associés à ses n^2 cases.

Dans toute la suite de l'exercice, on notera $B_{i,n}$ le bloc de taille n auquel on associe ce nombre i .

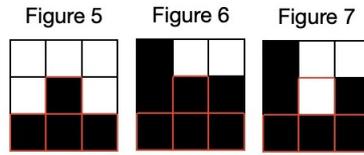
Par exemple :

- le nombre $1^9 = 1$ est associé au *Bloc* de la figure 1 : ce *Bloc* est noté $B_{1,3}$;
- le nombre $1^5 \times 2^1 \times 3^3 = 54$ est associé au *Bloc* de la figure 2 : ce *Bloc* est noté $B_{54,3}$.

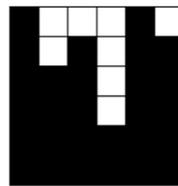
3. Tracer le *Bloc* $B_{90,3}$ de taille 3 auquel est associé le nombre 90.
4. Le nombre 2 500 est-il associé à un *Bloc* de taille 3 ?
5. Quel est le plus grand nombre associé à un *Bloc* de taille 3 ?

Soient i et j deux entiers associés à deux *Blocs* de taille n . On dit que $B_{i,n}$ se pose sur $B_{j,n}$ si toutes les cases noires de $B_{i,n}$ sont également colorées en noir sur $B_{j,n}$.

Par exemple, le *Bloc* de la figure 5 se pose sur celui de la figure 6 mais pas sur celui de la figure 7.



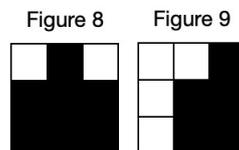
6. (a) Tracer tous les *Blocs* qui se posent sur celui de la figure 5. Pour cela, on pourra utiliser les quadrillages de l'annexe 1.
 (b) Quels sont les nombres associés à ces *Blocs* ?
7. Soient i et j deux entiers naturels associés à deux *Blocs* de taille n .
 (a) Démontrer que si $B_{i,n}$ se pose sur $B_{j,n}$ alors le nombre i divise j .
 (b) Réciproquement, démontrer que si i divise j alors $B_{i,n}$ se pose sur $B_{j,n}$.
 (c) Déterminer le nombre de diviseurs positifs du nombre associé au *Bloc* de taille 6 ci-dessous :



- (d) Trouver tous les nombres associés à des *Blocs* de taille 3 et qui ont exactement 18 diviseurs positifs.
 (e) Combien de nombres associés à des *Blocs* de taille 3 ont exactement cinq diviseurs positifs ?

Un *Bloc* est un *Bloc miroir* s'il admet au moins un axe de symétrie.

Par exemple, le *Bloc* de la figure 8 est un *Bloc miroir* mais pas celui de la figure 9.



8. Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.
 (a) Il existe un *Bloc miroir* de taille 3 ayant au moins deux axes de symétrie.
 (b) Le *Bloc* $B_{270,3}$ est un *Bloc miroir*.
 (c) Il existe au moins 20 *Blocs miroirs* de taille 3.
 (d) Il existe un *Bloc miroir* de taille 3 dont le nombre associé a exactement 36 diviseurs.
 (e) Pour tout nombre entier naturel k non nul, il existe un *Bloc miroir* dont le nombre associé admet exactement k diviseurs.

Exercice 2 - Des nombres en spirale

En écrivant les nombres entiers positifs non nuls en spirale on voit apparaître une infinité d'anneaux concentriques.

Sur l'anneau 1 figurent les nombres entiers de 2 à 9, sur l'anneau 2 les nombres entiers de 10 à 25, sur l'anneau 3 les nombres entiers de 26 à 49, ...

65	64	63	62	61	60	59	58	57
66	37	36	35	34	33	32	31	56
67	38	17	16	15	14	13	30	55
68	39	18	5	4	3	12	29	54
69	40	19	6	1	2	11	28	53
70	41	20	7	8	9	10	27	52
71	42	21	22	23	24	25	26	51
72	43	44	45	46	47	48	49	50
73	74	75	76	77	78	79	80	81

Partie A - D'anneaux en anneaux

L'anneau 1 est formé de huit entiers naturels.

1. Combien de nombres entiers forment l'anneau 2 ?
2. Combien de nombres entiers forment l'anneau 3 ?
3. Combien de nombres entiers forment l'anneau 6 ?
4. Pour n non nul fixé, combien de nombres entiers forment l'anneau n ?

Partie B - Des polynômes générateurs de diagonales

On s'intéresse aux suites croissantes $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres entiers appartenant à des anneaux consécutifs de la spirale et alignés en diagonale.

La figure ci-contre donne un exemple d'une telle suite avec $u_0 = 22$, $u_1 = 44$ et $u_2 = 74$.

Dans cet exercice, on pourra utiliser, sans démonstration, la formule donnant la somme des entiers naturels compris entre 1 et n , où n est un entier naturel non nul : $1 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

-	-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	15	14	13	-	-
-	-	-	5	4	3	12	-	-
-	-	-	6	1	2	11	-	-
-	-	-	7	8	9	10	-	-
-	-	-	u_0	-	-	-	-	-
-	-	u_1	-	-	-	-	-	-
-	u_2	-	-	-	-	-	-	-

1. Diagonale 1

La suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 4n^2 + 12n + 7$ génère une diagonale de cette spirale. Combien de nombres premiers peut-on compter parmi les cinq premiers nombres entiers de cette spirale ? Quels sont-ils ? Expliquer.

2. Diagonale 2

Soit la suite de nombres entiers alignés en diagonale de la spirale $u_0 = 1$, $u_1 = 9$, $u_2 = 25$, $u_3 = 49$, $u_4 = 81$... Pour tout entier naturel n , donner l'expression de u_n en fonction de n . Aucune justification n'est attendue.

3. Diagonale 3

Soit la suite de nombres entiers alignés en diagonale de la spirale $u_0 = 4$, $u_1 = 16$, $u_2 = 36$, $u_3 = 64$, ... On admet qu'il existe trois nombres entiers naturels a, b, c tels que, pour tout entier naturel n , le terme u_n de cette suite peut s'écrire sous la forme suivante : $u_n = an^2 + bn + c$. Déterminer les nombres a, b, c .

4. Généralisation

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $v_n = u_n - u_{n-1}$ et on admet que $v_{n+1} = v_n + 8$.

- (a) Pour tout entier naturel n non nul, exprimer v_n en fonction de n et de v_1 .
- (b) Démontrer que pour tout entier naturel n on a : $u_n - u_0 = 4n(n - 1) + nv_1$.
- (c) En déduire qu'il existe deux entiers naturels d et e tels que, pour tout entier naturel n , le terme u_n de la suite peut s'écrire sous la forme $u_n = 4n^2 + dn + e$. Exprimer d et e en fonction de u_0 et u_1 .
- (d)
 - i. Trouver l'expression de u_n qui génère la diagonale de la spirale commençant par les nombres premiers $u_0 = 5$ et $u_1 = 19$.
 - ii. Jusqu'à quel rang n les nombres entiers ainsi générés sont-ils premiers ? Expliquer.

Partie C - Un anneau pour une année

1. Quel est le numéro de l'anneau de la spirale sur lequel est situé le nombre 2023 ? Expliquer.
2. Quel est le plus petit nombre entier situé sur cet anneau ? Quel est le plus grand nombre entier situé sur cet anneau ?

Annexe

Exercice 1 - Blocs arithmétiques

Les quadrillages de cette annexe peuvent être utilisés pour tracer des *Blocs* lors des phases de recherche ou pour répondre aux questions. Dans ce dernier cas, il convient de **découper les *Blocs* et de les coller sur la copie.**

