# Olympiades nationales de mathématiques 2023

## Voie technologique

---

## Académie de Nice

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie («exercices nationaux»). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie («exercices académiques»). Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

**Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.**

# Exercices académiques

## Résolution en équipe

Les candidats traitent **les deux exercices**.

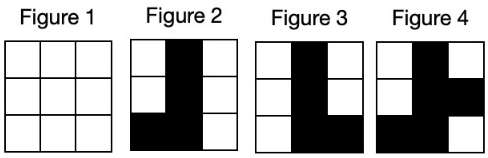
# Exercice 1 - Tout en blocs

Dans tout l'exercice, $n$ est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On appelle *Bloc* de taille $n$ tout quadrillage blanc de $n$ lignes et $n$ colonnes dont certaines cases sont colorées en noir en respectant la règle suivante :

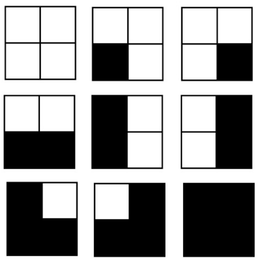
**si une case est noire, alors toutes les cases qui sont en dessous de celle-ci sont noires.**

Par exemple, les figures 1, 2 et 3 sont des *Blocs* différents de taille 3. La figure 4 n'est pas un *Bloc* de taille 3.




Remarquons qu'une fois dessiné, on ne retourne pas un *Bloc*.

1. Tracer sur la copie tous les *Blocs* de taille 2.



2. Combien y a-t-il de *Blocs* de taille 6 ?
   Il y en a $7^6 = 117649$.

On rappelle qu'un nombre premier est un nombre entier positif ayant exactement deux diviseurs positifs : 1 et lui-même. Les six premiers nombres premiers sont 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13.

À chaque case d'un *Bloc* de taille $n$, on associe :

- le nombre 1 si la case est blanche ;
- le $k$-ième nombre premier si la case est noire et se trouve dans la $k$-ième colonne du *Bloc*.

Ainsi, à tout *Bloc* de taille $n$, on associe un unique nombre entier naturel $i$ égal au produit des nombres associés à ses $n^2$ cases.

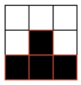
Dans toute la suite de l'exercice, on notera $B_{i,n}$ le bloc de taille $n$ auquel on associe ce nombre $i$.

Par exemple :

- le nombre $1^9 = 1$ est associé au *Bloc* de la figure 1 : ce *Bloc* est noté $B_{1,3}$ ;

- le nombre $1^5 \times 2^1 \times 3^3 = 54$ est associé au *Bloc* de la figure 2 : ce *Bloc* est noté $B_{54,3}$.

3. Tracer le *Bloc* $B_{90,3}$ de taille 3 auquel est associé le nombre 90.
   Comme $90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5$, le *Bloc* $B_{90,3}$ est :

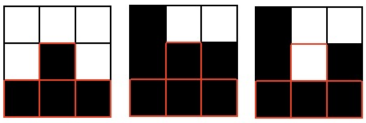


4. Le nombre 2 500 est-il associé à un *Bloc* de taille 3 ?
   Comme $2500 = 2^2 \times 5^4$ le nombre 2 500 n'est pas associé à un *Bloc* de taille 3.
5. Quel est le plus grand nombre associé à un *Bloc* de taille 3 ?
   C'est le nombre $2^3 \times 3^3 \times 5^3 = 27000$.

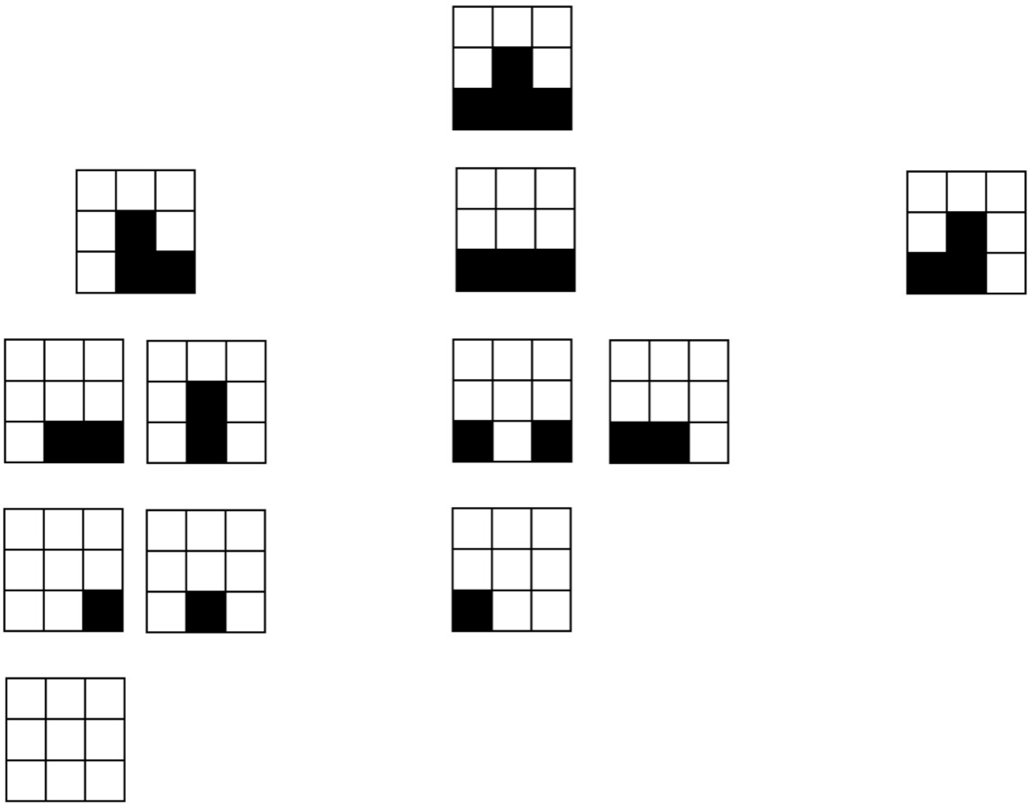
Soient $i$ et $j$ deux entiers associés à deux *Blocs* de taille $n$. On dit que $B_{i,n}$ se pose sur $B_{j,n}$ si toutes les cases noires de $B_{i,n}$ sont également colorées en noir sur $B_{j,n}$.

Par exemple, le *Bloc* de la figure 5 se pose sur celui de la figure 6 mais pas sur celui de la figure 7.

Figure 5 Figure 6 Figure 7



6. (a) Tracer tous les *Blocs* qui se posent sur celui de la figure 5. Pour cela, on pourra utiliser les quadrillages de l'annexe 1.

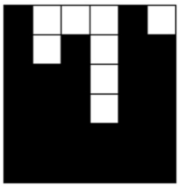


(b) Quels sont les nombres associés à ces *Blocs* ?

Les nombres associés sont 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 9 ; 10 ; 15 ; 18 ; 30 ; 45 ; 90. Ce sont tous les diviseurs de 90.

7. On admet la propriété suivante : le *Bloc* $B_{i,n}$ se pose sur le *Bloc* $B_{j,n}$ si et seulement si le nombre $i$ divise $j$.

(a) Déterminer le nombre de diviseurs positifs du nombre associé au *Bloc* de taille 6 ci-dessous :



La question revient à dénombrer le nombre de *Blocs* qui se posent sur ce *Bloc* de taille 6. Il y en a $7 \times 5 \times 6 \times 3 \times 7 \times 6 = 26460$

(b) Trouver tous les nombres associés à des *Blocs* de taille 3 et qui ont exactement 18 diviseurs positifs.

Comme $18 = 2 \times 3 \times 3$, ce sont tous les nombres associés à un *Bloc* ayant une colonne avec une case noire et deux colonnes avec 2 cases noires. Il y en a 3 : $2 \times 3^2 \times 5^2 = 450$, $2^2 \times 3 \times 5^2 = 300$ et $2^2 \times 3^2 \times 5 = 180$.

(c) Combien de nombres associés à des *Blocs* de taille 3 ont exactement cinq diviseurs positifs ?

5 est un nombre premier. Les nombres cherchés sont associés à des *Blocs* dont l'une des colonnes comporte 4 cases noires. C'est impossible avec des *Blocs* de taille 3. Il n'y a donc pas de nombres associés à des *Blocs* de taille 3 qui ont exactement 5 diviseurs.

# Exercice 2 - Pièces en prise mutuelle

On considère un plateau de jeu de 64 cases composés de 8 colonnes nommées a, b, c, d, e, f, g et h et de 8 lignes numérotées de 1 à 8. Les cases de ce plateau sont soit blanches, soit grisées. Par exemple, la case a1 est grisée, la case b1 est blanche, la case c1 est grisée, etc.

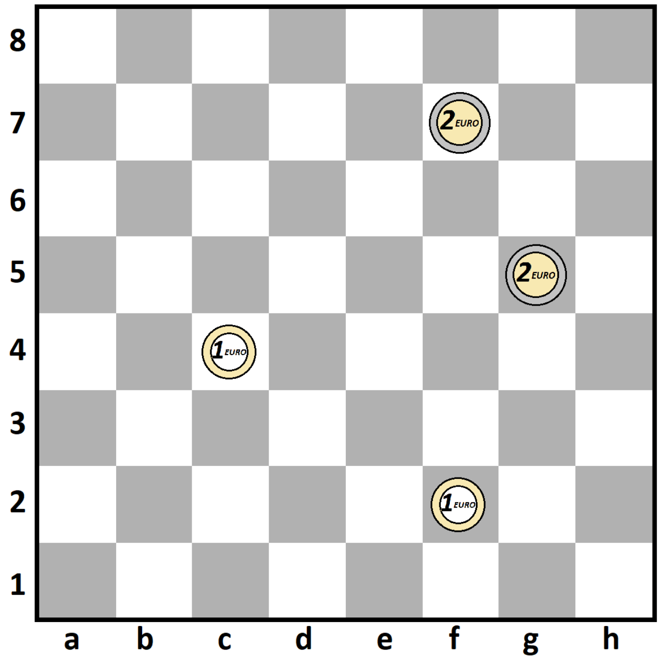



Figure 1

Dans cet exercice, on étudie les différentes possibilités de placer dans les cases de ce plateau de jeu des pièces de 1 euro et de 2 euros.

Sur la figure 1, on a disposé sur le plateau :

- une pièce de 1 euro dans la case c4 ;
- une pièce de 1 euro dans la case f2 ;
- une pièce de 2 euros dans la case f7 ;
- une pièce de 2 euros dans la case g5.

**Dans cet exercice, on ne peut placer qu'une seule pièce au maximum par case.**

## Partie A - Placer deux pièces

1. Combien y a-t-il de façons, sur un plateau vide, de placer simultanément une pièce de 1 euro et une pièce de 2 euros dans des cases blanches ?
   On a 32 cases blanches possibles afin de placer la pièce de 1 euro. Puis il reste 31 cases blanches possibles de placer la pièce de 2 euros. On a donc $31 \times 32 = 992$ manières de placer ces deux pièces sur des cases blanches.

On dit **qu'une pièce de 1 euro et une pièce de 2 euros sont en prise mutuelle** si elles sont alignées en diagonale sur le plateau. Par exemple sur la figure 1, la pièce de 1 euro en c4 et la pièce de 2 euros en f7 sont en prise mutuelle mais pas les pièces des cases f2 et g5. Deux pièces qui sont en prise mutuelle sont donc nécessairement dans des cases de même couleur.

2. (a) On place une pièce de 1 euro dans la case c6 d'un plateau vide. Citer les 11 cases où peut être placée une pièce de 2 euros de telle manière qu'elle soit en prise mutuelle avec la pièce de 1 euro.

   Ce sont les cases a8, b7, d5, e4, f3, g2, h1, a4, b5, d7, e8.

   (b) Dans l'annexe 2, on a inscrit 11 dans la case c6 pour indiquer le nombre de ces possibilités. De même, on a complété toutes les cases grisées en suivant le même principe. Sans justifier, compléter les cases blanches du plateau de l'annexe 2.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 |
| 7 | 7 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 7 |
| 6 | 7 | 9 | 11 | 11 | 11 | 11 | 9 | 7 |
| 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 13 | 11 | 9 | 7 |
| 4 | 7 | 9 | 11 | 13 | 13 | 11 | 9 | 7 |
| 3 | 7 | 9 | 11 | 11 | 11 | 11 | 9 | 7 |
| 2 | 7 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 7 |
| 1 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 |
| | a | b | c | d | e | f | g | h |

   (c) Combien a-t-on de façons, sur un plateau vide, de placer une pièce de 1 euro et une pièce de 2 euros à la fois sur des cases blanches et en prise mutuelle ?

   D'après la question précédente, on a $7\times 14+9\times 10+6\times 11+2\times 13=280$ façons de placer les deux pièces sur des cases blanches telle qu'elles soient en prise mutuelle.

## Partie B - Placer quatre pièces

On dispose de deux pièces de 1 euro et de deux pièces de 2 euros que l'on souhaite placer sur le plateau de jeu vide de la manière suivante :

- on place une pièce de 1 euro dans une case blanche, cette pièce est alors notée 1B. On place l'autre pièce de 1 euro dans une case grisée, cette pièce est alors notée 1G ;
- de même, on place une pièce de 2 euros dans une case blanche, cette pièce est alors notée 2B. On place l'autre pièce de 2 euros dans une case grisée, cette pièce est alors notée 2G.

1. En utilisant la question A.1., déterminer le nombre de façons de placer ces quatre pièces sur le plateau de jeu vide.

A la question 1 de la partie A, on a vu que l'on a 992 façons de placer les pièces 1B et 2B. De manière analogue, on a 992 façons de placer les pièces 1G et 2G. On a donc $992^2 = 984064$ façons de placer nos quatre pièces sur un plateau vide.

2. Sur le plateau de jeu vide, on place au hasard les deux pièces 1B et 2B dans des cases blanches puis on place également au hasard les deux pièces 1G et 2G dans des cases grisées. On note :
   - G l'événement "les pièces 1G et 2G sont en prise mutuelle",
   - B l'événement "les pièces 1B et 2B sont en prise mutuelle".

   On admet que $P(G) = P(B)$.

   (a) Démontrer que $P(B) = \dfrac{35}{124}$.

   D'après les questions précédentes, on a 280 façons de placer les pièces 1B et 2B telle qu'elles soient en prise mutuelle parmi les 992 façons de placer ces deux pièces. On a donc $P(B) = 280/992 = \dfrac{35}{124}$.

   (b) Démontrer que $P(G \cap B) = \dfrac{1225}{15376}$.

   **Méthode 1** : on remarque que les événements G et B sont indépendants d'où $P(G \cap B) = P(G) \times P(B) = (\dfrac{35}{124})^2 = \dfrac{1225}{15376}$.

   **Méthode 2** : On a 280 façons de placer les pièces 1B et 2B telles qu'elles soient en prise mutuelle, et de manière symétrique, on a 280 façons de placer les pièces 1G et 2G telles qu'elles soient en prise mutuelle. On a donc $280^2 = 78400$ façons de placer ces quatre pièces afin de vérifier l'événement $G \cap B$. On a donc $P(G \cap B) = \dfrac{78400}{984064} = \dfrac{1225}{15376}$.

   (c) Calculer la probabilité, arrondie au millième, qu'au moins une paire de pièces soit en prise mutuelle.

   $P(G \cup B) = P(G) + P(B) - P(G \cap B) = 2 \times \dfrac{35}{124} - \dfrac{1225}{15376} \approx 0,485$.