Olympiades nationales de mathématiques 2023

Spécialité mathématiques

Académie de Nice

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie («exercices nationaux»). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie («exercices académiques»). Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercices académiques

Résolution individuelle

Les candidats traitent **les deux exercices**.

Exercice 1 - Tout FEUX tout FUN

Partie A - Nombres FUN

On dit qu'un nombre entier relatif est FUN s'il est consécutif d'un multiple de 3, c'est-à-dire si la différence entre ce nombre et le multiple de 3 qui le précède immédiatement **F**ait **UN**.

Par exemple :

- 4 est FUN car $4 - 3 \times 1 = 1$;
- 13 est FUN car $13 - 3 \times 4 = 1$;
- -8 est FUN car $-8 - 3 \times (-3) = 1$;
- 14 n'est pas FUN car $14 - 3 \times 4 = 2$.

On admet que les nombres FUN sont les nombres entiers relatifs s'écrivant sous la forme $3k + 1$ où k est un nombre entier relatif. Cette écriture est unique.

A1. Nombres FUN positifs inférieurs à 60

Quels sont tous les nombres FUN compris entre 0 et 60 ?

1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, 37, 40, 43, 46, 49, 52, 55, 58.

A2. Somme

1. Soient $A = 76$, $B = -23$ et $C = 9\,999\,999\,999\,999\,991$.
   (a) Prouver que les nombres A, B et C sont FUN.
   $A = 75 + 1 = 3 \times 25 + 1$ $B = -24 + 1 = -8 \times 3 + 1$ et $C = 3 \times 3\,333\,333\,333\,333\,330 + 1$.
   (b) La somme $A + B$ est-elle FUN ? Justifier.
   $A + B = 76 - 23 = 53 = 3 \times 17 + 2$ donc $A + B$ n'est pas fun.
   (c) La somme $A + B + C$ est-elle FUN ? Justifier.
   $A + B + C = 3 \times (17 + 3\,333\,333\,333\,333\,330) + 2 + 1 = 3 \times 3\,333\,333\,333\,333\,348 + 0$ donc $A + B + C$ n'est pas fun.
2. Cas général
   (a) Prouver que la somme de trois nombres FUN n'est jamais FUN.
   Soient $A = 3k + 1$, $B = 3k' + 1$ et $C = 3k'' + 1$ trois nombres FUN avec k, k' et k'' trois entiers relatifs. Alors $A + B + C = 3(k + k' + k'') + 3 = 3(k + k' + k'' + 1)$ avec $k + k' + k'' + 1$ un entier relatif donc $A + B + C$ n'est jamais FUN.
   (b) La somme de quatre nombres FUN est-elle FUN ? Justifier.
   Soient $A = 3k_1 + 1$, $B = 3k_2 + 1$, $C = 3k_3 + 1$ et $D = 3k_4 + 1$ quatre nombres FUN avec k_1, k_2, k_3 et k_4 quatre nombre entiers relatifs.
   Alors $3(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) + 4 = 3(k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + 1) + 1$ avec $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + 1$ un entier relatif donc leur somme est FUN.

A3. Produit

1. Montrer que le produit de deux nombres FUN est FUN.
   Soient $A = 3k + 1$ et $B = 3k' + 1$ deux nombres FUN avec k et k' deux nombres entiers relatifs. Alors $A \times B = (3k+1)(3k'+1) = 9kk' + 3k + 3k' + 1 = 3(3kk' + k + k') + 1$ avec $3kk' + k + k'$ un entier relatif donc $A \times B$ est FUN.
2. L'opposé d'un nombre FUN est-il FUN ? Justifier.
   Non. Par exemple, l'opposé du nombre FUN 4 est -4 et -4 n'est pas FUN car $-4 = 3 \times (-2) + 2$.

A4. Nombres FUN-primitifs

On dit qu'un nombre FUN strictement supérieur à 1 est un nombre FUN-primitif si ses seuls diviseurs positifs FUN sont 1 et lui-même.

Par exemple 4 est un nombre FUN-primitif. En effet, 4 possède trois diviseurs positifs, 1, 2 et 4 mais ses seuls diviseurs positifs FUN sont 1 et 4 car 2 n'est pas un nombre FUN

1. Énoncer la liste des nombres FUN-primitifs inférieurs à 60.
   4, 7, 10, 13, 19, 22, 25, 31, 34, 37, 43, 46, 55, 58
2. Trouver un nombre entier F qui est FUN et qui peut se décomposer de deux manières différentes sous la forme $F = p_1 \times p_2 = p_3 \times p_4$, où p_1, p_2, p_3, p_4 des nombres FUN-primitifs distincts.
   Par exemple : $220 = 4 \times 55 = 10 \times 22$.

Partie B - Nombres FEUX

On dit qu'un nombre entier relatif est FEUX si la différence entre ce nombre et le multiple de 3 qui le précède immédiatement **F**ait D**EUX**.

Par exemple :

- 5 est FEUX car $5 - 3 \times 1 = 2$;
- 11 est FEUX car $11 - 3 \times 3 = 2$;
- -13 est FEUX car $-13 - 3 \times (-5) = 2$;
- 18 n'est pas FEUX car $18 - 3 \times 6 = 0$.

On admet que les nombres FEUX sont les nombres entiers relatifs s'écrivant sous la forme $3k + 2$ où k est un nombre entier relatif. Cette écriture est unique.

1. Démontrer qu'il n'existe pas de nombre à la fois FUN et FEUX.
   Supposons, par l'absurde qu'il en existe un noté A. Alors $A = 3k + 1$ et $A = 3k' + 2$ avec k et k' deux entiers relatifs.
   Donc $0 = A - A = 3k + 1 - 3k' - 2 = 3(k - k') - 1$ alors $3(k - k') = 1$ avec $k - k'$ un entier relatif. Or 1 n'est pas multiple de 3. Ce qui amène à une contradiction. Donc il n'existe pas de nombre à la fois FUN et FEUX.

2. Montrer que la somme de deux nombres FEUX est FUN.

   Soient $A = 3k + 2$ et $B = 3k' + 2$ deux nombres FEUX avec k et k' deux nombres entiers relatifs. Alors $A + B = 3(k + k') + 4 = 3(k + k' + 1) + 1$ avec $k + k' + 1$ un entier relatif donc $A + B$ est FUN.

3. Montrer que la somme de deux nombres FUN est FEUX.

   Soient $A = 3k + 1$ et $B = 3k' + 1$ deux nombres FUN avec k et k' deux entiers relatifs. Alors $A + B = 3(k + k') + 2$ avec $k + k'$ un entier relatif donc $A + B$ est FEUX.

4. Que dire du produit de deux nombres FEUX ? Énoncer et démontrer cette propriété.

   Soient $A = 3k + 2$ et $B = 3k' + 2$ deux nombres FEUX avec k et k' deux entiers relatifs. Alors $A \times B = 9kk' + 6k + 6k' + 4 = 3(3kk' + 2k + 2k' + 1) + 1$ avec $3kk' + 2k + 2k' + 1$ un entier relatif donc $A \times B$ est FUN.

Partie C - À table !

On dit qu'un nombre entier est FEZ s'il est multiple de 3.

Recopier et compléter les tables d'opération suivantes, à l'aide des mots FEZ, FUN, FEUX. Aucune justification n'est attendue.

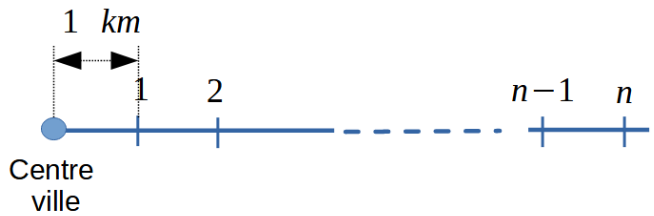
$+$	FUN	$FEUX$
FUN	$FEUX$	FEZ
$FEUX$	FEZ	FUN

$\times$	FUN	$FEUX$
FUN	FUN	$FEUX$
$FEUX$	$FEUX$	FUN

Exercice 2 - Médiane express

Un livreur doit apporter des colis à différents magasins situés sur une longue rue. On prend une situation simple : la rue est rectiligne et deux magasins situés côte à côte sont distants de 1 km (kilomètre). Le premier magasin est à 1 km du centre-ville, le second magasin est situé à 2 km du centre-ville,...

Soit n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère qu'il y a n magasins. Chaque magasin est numéroté et repéré par un entier i compris entre 1 et n. On peut ainsi représenter l'ensemble des magasins sur un demi-axe gradué d'origine le centre-ville :



Le livreur livre tous les magasins sans ordre précis a priori. Nous allons déterminer la distance parcourue par le livreur pour effectuer les livraisons des n magasins.

Partie A - En voiture

Au départ, le livreur arrive à un des magasins et utilise son véhicule de transport pour tous les trajets qu'il devra effectuer. Depuis ce premier magasin, on comptabilise le nombre de kilomètres qu'il va parcourir pour livrer tous les autres magasins.

Par exemple, pour $n = 6$ magasins, si le livreur arrive au magasin situé à 2 km du centre-ville et décide d'effectuer ses livraisons dans l'ordre suivant : $2 \to 4 \to 5 \to 3 \to 6 \to 1$. La distance parcourue est alors de $2 + 1 + 2 + 3 + 5 = 13$ km.

On pourra utiliser cette rédaction pour illustrer les raisonnements.

1. Dans cette question, on considère le cas $n = 5$.
   a) Vérifier que la distance parcourue est de 7 km si le livreur suit l'ordre suivant :
   $$1 \to 3 \to 4 \to 5 \to 2.$$
   La distance parcourue est $2 + 1 + 1 + 3 = 7$ km.
   b) Citer tous les parcours de livraison dont la distance vaut 4 km.
   $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5$ et $5 \to 4 \to 3 \to 2 \to 1$
   c) Trouver deux parcours de livraison dont la distance vaut 10 km.
   [[4, 1, 3, 5, 2], [1, 4, 2, 5, 3], [3, 4, 2, 5, 1], [2, 3, 5, 1, 4], [3, 5, 2, 4, 1], [2, 5, 3, 1, 4], [4, 3, 1, 5, 2], [1, 5, 2, 4, 3], [5, 2, 4, 1, 3], [5, 1, 4, 2, 3], [3, 2, 4, 1, 5], [3, 1, 4, 2, 5], [4, 1, 5, 3, 2], [2, 5, 1, 3, 4]]
   d) Existe-t-il un parcours dont la distance est strictement supérieure à 10 km ? Justifier.
   Oui, par exemple le parcours $2 \to 5 \to 1 \to 4 \to 3$ mesure $3 + 4 + 3 + 1 = 11$ km.

Désormais on considère un entier $n \geqslant 2$.

2. a) Trouver un parcours de livraison tel que la distance parcourue soit $n-1$ km.

   Le parcours $1 \to 2 \to 3 \to ... \to n$

   b) Est-ce la distance la plus courte possible ?

   La distance minimale entre deux magasins vaut 1 et il y a $n-1$ magasins à visiter à partir d'un magasin quelconque donc la distance d vérifie $d \geqslant n-1$.

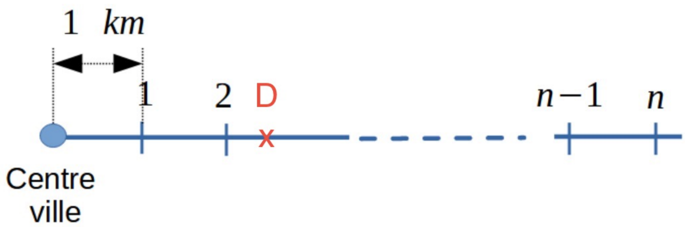
   De plus le trajet $1 \to 2 \to 3 \to ... \to n$ a pour distance $n-1$ km donc la distance minimale est $n-1$.

Partie B - À bout de bras

Désormais le livreur gare son véhicule entre le premier et le dernier magasin. On note D le point correspondant à l'emplacement de son véhicule. Il ne l'utilisera plus et devra donc à chaque livraison faire l'aller-retour à pied entre son véhicule et chacun des magasins. Après la dernière livraison, le livreur retourne à son véhicule.

On admettra que la distance ainsi parcourue par le livreur ne dépend pas de l'ordre des magasins livrés.

Par exemple, dans la figure ci-dessous, le livreur a garé son véhicule à $2,5$ km du centre-ville. Pour livrer les deux premiers magasins, le livreur peut effectuer le trajet $D \to 1 \to D \to 2 \to D$. La distance parcourue par le livreur est $1,5+1,5+0,5+0,5 = 4$ km. Si le livreur effectue un autre trajet, par exemple $D \to 2 \to D \to 1 \to D$, la distance parcourue est toujours égale à 4 km.



1. Dans cette question, on considère le cas $n = 5$.

   a) Le livreur gare son véhicule en D situé à $2,5$ km du centre-ville. Vérifier que la distance est 13 km si le livreur livre les magasins dans l'ordre 1, 2, 3, 4, 5 correspondant au trajet $D \to 1 \to D \to 2 \to D \to 3 \to D \to 4 \to D \to 5 \to D$.

   On calcule $2 \times (1,5+0,5+0,5+1,5+2,5) = 13$ *km*.

   b) Le livreur gare son véhicule en D situé à 3 km du centre-ville. Déterminer la distance parcourue pour livrer tous les magasins.

   Le trajet est $D \to 1 \to D \to 2 \to D \to 4 \to D \to 5 \to D \to 6 \to D$.

   La distance totale est $2 \times 2 \times (1+2) = 12$ km.

2. Dans cette question, on considère le cas $n = 6$.

   a) Le livreur gare son véhicule en D situé à 2 km du centre-ville. Déterminer la distance parcourue pour livrer tous les magasins.

   On calcule $2 \times (1+1+2+3+4) = 22$ *km*.

   b) Dans cette question, x est un nombre réel compris entre 0 et 6. Le livreur gare son véhicule en D situé à x km du centre-ville. Soit f la fonction qui à x associe la distance parcourue par le livreur au cours de la livraison de tous les magasins.

i. Montrer que, pour $x \in [2; 3]$, $f(x) = 30 - 4x$.

Comme la distance parcourue ne dépend pas de l'ordre des magasins livrés, on calcule $f(x)$ en utilisant le trajet $D \to 2 \to D \to 1 \to D \to 3 \to D \to 4 \to D \to 5 \to D \to 6 \to D$.

On en déduit que :

$f(x) = 2\left((x-2) + (x-1) + (3-x) + (4-x) + (5-x) + (6-x)\right)$

$f(x) = 2\left(-2x + 15\right)$

$f(x) = -4x + 30$

ii. Montrer que, pour $x \in [3; 4]$, $f(x) = 18$.

Comme la distance parcourue ne dépend pas de l'ordre des magasins livrés, on calcule $f(x)$ en utilisant le trajet $D \to 3 \to D \to 2 \to D \to 1 \to D \to 4 \to D \to 5 \to D \to 6 \to D$.

On en déduit que :

$f(x) = 2\left((x-3) + (x-2) + (x-1) + (4-x) + (5-x) + (6-x)\right)$

$f(x) = 2 \times 9$

$f(x) = 18$

iii. Sur l'annexe, compléter la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle $[0; 6]$. Aucune justification n'est attendue.

cf annexe

iv. Par lecture graphique, en déduire les valeurs de x pour lesquelles la distance de livraison est la plus courte possible.

D'après le graphique, pour que la distance soit la plus courte possible, il faut et il suffit que $x \in [3; 4]$. Elle est alors égale à 18 km.

Annexe

Exercice 2 - Question B.2.b)iii.