Olympiades nationales de mathématiques 2023

Voie technologique

Académie de Nice

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie («exercices nationaux»). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie («exercices académiques»). Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercices académiques

Résolution individuelle

Les candidats traitent **les deux exercices**.

Exercice 1 - Des urnes pas comme les autres

On considère des urnes opaques contenant quatre boules indiscernables au toucher.
Sur chaque boule est inscrit un nombre entier naturel : on identifiera une boule avec le nombre inscrit sur celle-ci.

Par exemple, on joue avec deux urnes : la première urne, appelée A, contient les boules 2, 4, 6, 6 et la deuxième urne, appelée B, contient les boules 1, 3, 5, 7.

On pioche au hasard une boule dans l'urne A et une boule dans l'urne B.
On considère l'événement « le nombre inscrit sur la boule piochée dans l'urne A est supérieur à celui inscrit sur la boule de l'urne B ». On le note $A > B$.
On dit que **l'urne A est *meilleure* que l'urne B** si la probabilité de l'événement $A > B$ est strictement supérieure à $\frac{1}{2}$.

Par exemple, les 16 tirages possibles avec les urnes précédentes sont représentés dans le tableau ci-contre. Pour chaque tirage, on a indiqué la lettre de l'urne dans laquelle a été piochée la boule portant le plus grand nombre. On en déduit que $P(A > B) = \frac{9}{16} > \frac{1}{2}$. Ainsi, l'urne A est meilleure que l'urne B.

Urne B \ Urne A	2	4	6	6
1	A	A	A	A
3	B	A	A	A
5	B	B	A	A
7	B	B	B	B

Partie A - Des urnes indifférentes

On considère les trois urnes suivantes :

l'urne A avec les boules	:	3	6	7	10
l'urne B avec les boules	:	2	5	8	11
l'urne C avec les boules	:	1	4	9	12

1. On pioche une boule dans une des trois urnes puis une boule dans une des deux urnes restantes.
   a) Comme dans l'exemple précédent, compléter les tableaux fournis en annexe en indiquant la lettre de l'urne dans laquelle a été piochée la boule portant le plus grand nombre.
   cf annexe
   b) Vérifier que $P(A > B) = \frac{1}{2}$ puis déterminer $P(B > C)$ et $P(C > A)$.
   D'après les tableaux de l'annexe, $P(A > B) = P(B > C) = P(C > A) = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$
   c) Y a-t-il une urne *meilleure* que l'autre ?
   Non car $P(A > B) = P(B > A) = \frac{1}{2}$, $P(A > C) = P(C > A) = \frac{1}{2}$, $P(B > C) = P(C > B) = \frac{1}{2}$.
2. Un premier joueur pioche une boule dans l'urne de son choix. Un deuxième joueur choisit au hasard une urne parmi les deux restantes puis il pioche une boule dans celle-ci. Le joueur qui a le plus grand nombre gagne la partie.

a) Le joueur 1 choisit l'urne A. Montrer que la probabilité qu'il gagne la partie est égale à $\frac{1}{2}$.
On note B l'événement "l'urne B est choisie par le joueur 2" et C l'événement "l'urne C est choisie par le joueur 2".
$P(B) \times P(A > B) + P(C) \times P(A > C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

b) Si le joueur 1 choisit une autre urne, la probabilité qu'il gagne la partie change-t-elle ?
Dans tous les cas, la probabilité est égale à $\frac{1}{2}$.

Partie B - Des urnes bien ordonnées

On considère désormais les trois urnes suivantes :

l'urne A avec les boules	:	1	4	7	10
l'urne B avec les boules	:	2	5	8	11
l'urne C avec les boules	:	3	6	9	12

1. On pioche une boule dans une des trois urnes puis une boule dans une des deux urnes restantes.
   a) Compléter les tableaux fournis en annexe en indiquant la lettre de l'urne dans laquelle a été piochée la boule portant le plus grand nombre.
   cf annexe
   b) Vérifier que $P(B > A) = \frac{5}{8}$ puis déterminer $P(C > B)$ et $P(C > A)$.
   D'après les tableaux de l'annexe, $P(B > A) = P(C > B) = P(C > A) = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$
   c) Y a-t-il une urne meilleure que toutes les autres ?
   L'urne C est la meilleure des trois.
2. Un premier joueur pioche une boule dans l'urne de son choix. Un deuxième joueur choisit au hasard une des deux urnes restantes et pioche une boule dans celle-ci.
   a) Quelle(s) urne(s) doit choisir le deuxième joueur pour avoir le plus de chance de gagner la partie ? On pourra s'aider de la question précédente.
   Si le premier joueur choisit l'urne A, les urnes B ou C sont plus avantageuses.
   Si le premier joueur choisit l'urne B, l'urne C est plus avantageuse.
   Si le premier joueur choisit l'urne C, tous les choix restants sont moins avantageux.
   b) i. Le joueur 1 choisit l'urne A. Montrer que la probabilité qu'il gagne la partie est $\frac{6}{16}$.
   $P(B) \times P(A > B) + P(C) \times P(A > C) = \frac{1}{2} \times \frac{6}{16} + \frac{1}{2} \times \frac{6}{16} = \frac{6}{16}$
   ii. Le joueur 1 choisit l'urne B. Montrer que la probabilité qu'il gagne la partie est $\frac{8}{16}$.
   On note A l'événement "l'urne A est choisie par le joueur 2".
   $P(A) \times P(B > A) + P(C) \times P(B > C) = \frac{1}{2} \times \frac{10}{16} + \frac{1}{2} \times \frac{6}{16} = \frac{8}{16}$
   iii. Le joueur 1 choisit l'urne C. Montrer que la probabilité qu'il gagne la partie est $\frac{10}{16}$.
   $P(A) \times P(C > A) + P(B) \times P(C > B) = \frac{1}{2} \times \frac{10}{16} + \frac{1}{2} \times \frac{10}{16} = \frac{10}{16}$
   iv. Quelle urne doit choisir le premier joueur pour avoir le plus de chance de gagner la partie ?
   D'après les questions précédentes, il vaut mieux choisir l'urne C.

Partie C - Des urnes désordonnées

On considère les trois urnes suivantes :

l'urne A avec les boules	:	1	4	7	7
l'urne B avec les boules	:	2	6	6	6
l'urne C avec les boules	:	3	5	5	8

1. On pioche une boule dans deux urnes parmi les trois.

   a) Compléter les tableaux fournis en annexe en indiquant la lettre de l'urne dans laquelle a été piochée la boule portant le plus grand nombre.
   cf annexe

   b) Déterminer $P(A > B)$, $P(B > C)$ et $P(C > A)$.
   Les trois probabilités valent $\frac{9}{16}$.

   c) Quelle est la meilleure urne entre l'urne B et l'urne C ? Et entre l'urne A et l'urne B ?
   On a $B > C$, $A > B$.

   d) Quelle est la meilleure urne entre l'urne A et l'urne C ? En quoi cette réponse est-elle étonnante ?
   D'après la question précédente, on s'attend par transitivité à ce que A soit meilleure que C, ce qui n'est pas le cas...

2. Un premier joueur pioche une boule dans l'urne de son choix. Un deuxième joueur choisit au hasard l'une des deux urnes restantes et pioche une boule dans celle-ci.

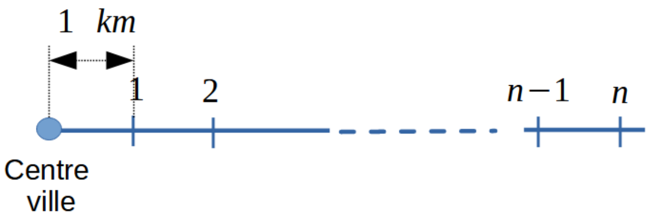
   a) Quelle(s) urne(s) doit choisir le deuxième joueur pour avoir le plus de chance de gagner la partie ? On pourra s'aider de la question précédente.
   Si le joueur 1 choisit l'urne A, il faut qu'il prenne l'urne C.
   Si le joueur 1 choisit l'urne B, il faut qu'il prenne l'urne A.
   Si le joueur 1 choisit l'urne C, il faut qu'il prenne l'urne B.

   b) Y a-t-il un meilleur choix pour le joueur 1 pour avoir le plus de chance de gagner la partie ?
   $P(B) \times P(A > B) + P(C) \times P(A > C) = \frac{1}{2} \times \frac{9}{16} + \frac{1}{2} \times \frac{7}{16} = \frac{1}{2}$
   $P(A) \times P(B > A) + P(C) \times P(B > C) = \frac{1}{2} \times \frac{7}{16} + \frac{1}{2} \times \frac{9}{16} = \frac{1}{2}$
   $P(A) \times P(C > A) + P(B) \times P(C > B) = \frac{1}{2} \times \frac{9}{16} + \frac{1}{2} \times \frac{7}{16} = \frac{1}{2}$
   Il n'y a pas de meilleur choix pour le joueur 1 car les trois probabilités sont égales.

Exercice 2 - En livraison

Un livreur doit apporter des colis à différents magasins situés sur une longue rue. On prend une situation simple : la rue est rectiligne et deux magasins situés côte à côte sont distants de 1 km (kilomètre). Le premier magasin est à 1 km du centre-ville, le second magasin est situé à 2 km du centre-ville,...

Soit n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère qu'il y a n magasins. Chaque magasin est numéroté et repéré par un entier i compris entre 1 et n. On peut ainsi représenter l'ensemble des magasins sur un demi-axe gradué d'origine le centre-ville :



Le livreur livre tous les magasins sans ordre précis a priori. Nous allons déterminer la distance parcourue par le livreur pour effectuer les livraisons des n magasins.

Partie A - En voiture

Au départ, le livreur arrive à un des magasins et utilise son véhicule de transport pour tous les trajets qu'il devra effectuer. Depuis ce premier magasin, on comptabilise le nombre de kilomètres qu'il va parcourir pour livrer tous les autres magasins.

Par exemple, pour $n = 6$ magasins, si le livreur arrive au magasin situé à 2 km du centre-ville et décide d'effectuer ses livraisons dans l'ordre suivant : $2 \to 4 \to 5 \to 3 \to 6 \to 1$. La distance parcourue est alors de $2 + 1 + 2 + 3 + 5 = 13$ km.

On pourra utiliser cette rédaction pour illustrer les raisonnements.

1. Dans cette question, on considère le cas $n = 5$.
   a) Vérifier que la distance parcourue est de 7 km si le livreur suit l'ordre suivant :
   $$1 \to 3 \to 4 \to 5 \to 2.$$
   La distance parcourue est $2 + 1 + 1 + 3 = 7$ km.
   b) Citer tous les parcours de livraison dont la distance vaut 4 km.
   $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5$ et $5 \to 4 \to 3 \to 2 \to 1$
   c) Trouver deux parcours de livraison dont la distance vaut 10 km.
   [[4, 1, 3, 5, 2], [1, 4, 2, 5, 3], [3, 4, 2, 5, 1], [2, 3, 5, 1, 4], [3, 5, 2, 4, 1], [2, 5, 3, 1, 4], [4, 3, 1, 5, 2], [1, 5, 2, 4, 3], [5, 2, 4, 1, 3], [5, 1, 4, 2, 3], [3, 2, 4, 1, 5], [3, 1, 4, 2, 5], [4, 1, 5, 3, 2], [2, 5, 1, 3, 4]]
   d) Existe-t-il un parcours dont la distance est strictement supérieure à 10 km ? Justifier.
   Oui, par exemple le parcours $2 \to 5 \to 1 \to 4 \to 3$ mesure $3 + 4 + 3 + 1 = 11$ km.

Désormais on considère un entier $n \geqslant 2$.

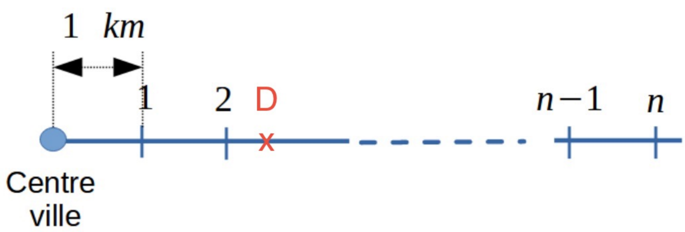
2. a) Trouver un parcours de livraison tel que la distance parcourue soit $n-1$ km.
   Le parcours $1 \to 2 \to 3 \to \dots \to n$
   b) Est-ce la distance la plus courte possible ?
   La distance minimale entre deux magasins vaut 1 et il y a $n-1$ magasins à visiter à partir d'un magasin quelconque donc la distance d vérifie $d \geqslant n-1$.
   De plus le trajet $1 \to 2 \to 3 \to \dots \to n$ a pour distance $n-1$ km donc la distance minimale est $n-1$.

Partie B - À bout de bras

Désormais le livreur gare son véhicule entre le premier et le dernier magasin. On note D le point correspondant à l'emplacement de son véhicule. Il ne l'utilisera plus et devra donc à chaque livraison faire l'aller-retour à pied entre son véhicule et chacun des magasins. Après la dernière livraison, le livreur retourne à son véhicule.

On admettra que la distance ainsi parcourue par le livreur ne dépend pas de l'ordre des magasins livrés.

Par exemple, dans la figure ci-dessous, le livreur a garé son véhicule à $2,5$ km du centre-ville. Pour livrer les deux premiers magasins, le livreur peut effectuer le trajet $D \to 1 \to D \to 2 \to D$. La distance parcourue par le livreur est $1,5+1,5+0,5+0,5 = 4$ km. Si le livreur effectue un autre trajet, par exemple $D \to 2 \to D \to 1 \to D$, la distance parcourue est toujours égale à 4 km.



1. Dans cette question, on considère le cas $n = 5$.
   a) Le livreur gare son véhicule en D situé à $2,5$ km du centre-ville. Vérifier que la distance est 13 km si le livreur livre les magasins dans l'ordre 1, 2, 3, 4, 5 correspondant au trajet $D \to 1 \to D \to 2 \to D \to 3 \to D \to 4 \to D \to 5 \to D$.
   On calcule $2 \times (1,5+0,5+0,5+1,5+2,5) = 13$ km.
   b) Le livreur gare son véhicule en D situé à 3 km du centre-ville. Déterminer la distance parcourue pour livrer tous les magasins.
   Le trajet est $D \to 1 \to D \to 2 \to D \to 4 \to D \to 5 \to D \to 6 \to D$.
   La distance totale est $2 \times 2 \times (1+2) = 12$ km.
2. Dans cette question, on considère le cas $n = 6$.
   a) Le livreur gare son véhicule en D situé à 2 km du centre-ville. Déterminer la distance parcourue pour livrer tous les magasins.
   On calcule $2 \times (1+1+2+3+4) = 22$ km.
   b) Trouver une position du point D afin d'obtenir une distance de livraison plus courte que la distance trouvée dans la question 2.a). Quelle distance obtient-on pour livrer tous les magasins ?
   On prend D placé entre le magasin 3 et 4 . Par exemple.....D à $3,5$ km.
   On calcule $2 \times 2 \times (0,5+1,5+2,5) = 18$ km

Annexes

Exercice 1 - Question A.1.a)

Urne B \ Urne A	3	6	7	10
2	A	A	A	A
5	B	A	A	A
8	B	B	B	A
11	B	B	B	B

Urne C \ Urne B	2	5	8	11
1	B	B	B	B
4	C	B	B	B
9	C	C	C	B
12	C	C	C	C

Urne A \ Urne C	1	4	9	12
3	A	C	C	C
6	A	A	C	C
7	A	A	C	C
10	A	A	A	C

Exercice 1 - Question B.1.a)

Urne B \ Urne A	1	4	7	10
2	B	A	A	A
5	B	B	A	A
8	B	B	B	A
11	B	B	B	B

Urne C \ Urne B	2	5	8	11
3	C	B	B	B
6	C	C	B	B
9	C	C	C	B
12	C	C	C	C

Urne A \ Urne C	3	6	9	12
1	C	C	C	C
4	A	C	C	C
7	A	A	C	C
10	A	A	A	C

Exercice 1 - Question C.1.a)

Urne B \ Urne A	1	4	7	7
2	B	A	A	A
6	B	B	A	A
6	B	B	A	A
6	B	B	A	A

Urne C \ Urne B	2	6	6	6
3	C	B	B	B
5	C	B	B	B
5	C	B	B	B
8	C	C	C	C

Urne A \ Urne C	3	5	5	8
1	C	C	C	C
4	A	C	C	C
7	A	A	A	C
7	A	A	A	C