

Exercice 1 (tous les candidats)*Plus fort !***1. Pourcentages pour tous les âges.**

a. Oui car la multiplication est commutative : $\frac{x}{100}y = \frac{y}{100}x$. En particulier, en intervertissant les données proposées, on se ramène 25 % de 32 euros, qui en est le quart, soit 8 euros.

b. Même pas en rêve ! Le prix est multiplié par $0,75^4$, soit environ 0,32.

c. Oui, là encore parce que les diagrammes sont commutatifs. Notons x le prix HT et y le prix TTC ; ils sont liés par la relation $y = 1,2x$. Si l'on double y , cela double $1,2x$, et donc x .

2. Double sens. Selon que le « le » renvoie au « nombre » ou à « 51 », on trouve 5 100 ou 0,51. Pour lever l'ambiguïté il faudrait construire la question différemment et au besoin, utiliser des virgules.

3. Le secret pour avoir 20/20. Le candidat reçoit la note de 7 sur 20. Pourtant, $\frac{4}{5} + \frac{3}{15} = \frac{12+3}{15} = 1 = \frac{20}{20}$: le paradoxe tient à ce que le calcul fractionnaire ne tient compte d'aucun coefficient (le problème et l'exercice sont mis sur le même plan, et la « note » est donnée sur 2 et non sur 20).

Dans le cas général, on compare $\frac{a}{5} + \frac{b}{15}$ à $\frac{a+b}{20}$. Or $\frac{a+b}{20} - \left(\frac{a}{5} + \frac{b}{15}\right) = -\frac{9a+b}{60}$ qui est négatif, d'où le résultat.

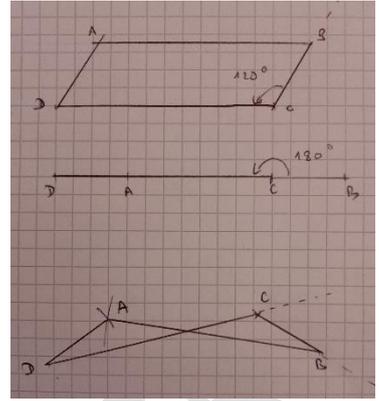
4. Trouver l'intrus. On prend 4 oranges au hasard, on en répartit 2 sur chaque plateau. Si la balance reste équilibrée, c'est l'orange non utilisée qui est la moins lourde. Sinon, on prend les 2 oranges du plateau le plus léger et on les compare avec une nouvelle pesée. Avec 2 024 oranges, c'est à peu près la même idée, que l'on réitère. On met 1 012 oranges de part et d'autre. Un plateau est le plus léger. On utilise les 1 012 oranges de ce plateau, on en met 506 de part et d'autre. Un plateau est plus léger. On utilise les 506 oranges de ce plateau, on en met 253 de part et d'autre. Un plateau est plus léger, on prend au hasard 252 de ses oranges, on en met 126 de part et d'autre. Si la balance reste équilibrée, c'est l'orange mise de côté qui est la plus légère. Sinon, on utilise les 126 oranges du plateau le plus léger et on recommence à chaque fois en mettant une orange de côté dès qu'on manipule un nombre impair d'oranges. Dans le pire cas, on passe de 2 024 à 1 012 à 506 à 253 à 126 à 63 à 31 à 15 à 7 à 3 à 1 orange(s) soit 10 pesées.

5. Tchou ! La pente des parois est (au signe près) égale à $\frac{10}{5} = 2$. Le verre du dessus a besoin de 9 cm de large. Il est translaté verticalement de $1 + 2 = 3$ cm (1 correspond à la hauteur du fond du verre du dessous, et 2 à la hauteur nécessaire pour élargir de 1 cm l'espace de chaque côté des 7 cm de base. L'ensemble s'élève à 13 cm.

6. Le début de la richesse. D'après le théorème de Thalès, la configuration proposée entraîne (et même revient à) évaluer $\frac{L}{\ell}$ et $\frac{L+\ell}{L}$. Posons $x = \frac{L}{\ell}$. Tout revient donc à $x = 1 + \frac{1}{x}$. On peut ensuite vérifier que le nombre (d'or) vérifie cette équation, ou la résoudre puisqu'elle se ramène à une équation du second degré.

7. Quelle forme !?

Dessins ci-contre. Pour ce qui est de la réalisation pratique, il y a trois configurations possibles, ici réalisées avec des briques de jeu de construction : deux étages avec les deux grandes barrettes au-dessus des deux petites ; trois étages avec les deux grandes barrettes au même niveau, une petite au-dessus, une petite au-dessous ; trois étages avec les deux petites barrettes au même niveau, une grande au-dessus, une grande au-dessous. Seule la troisième configuration se déforme jusqu'au contre-parallélogramme sans quoi les grandes barrettes vont se gêner quand elles vont se croiser ; quant aux petites, qui sont au même niveau, elles suffisamment petites pour ne pas se gêner à l'endroit des pivots.



8. Rien que pour vos yeux. Notons $a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ un vecteur directeur et orientant du rayon incident. Et suivons (par exemple) la trajectoire lue sur le dessin. Après le premier rebond, le rayon est dirigé et orienté par $a\vec{i} - b\vec{j} + c\vec{k}$, après le deuxième par $-a\vec{i} - b\vec{j} + c\vec{k}$ et après le troisième par $-a\vec{i} - b\vec{j} - c\vec{k}$. Le rayon réfléchi qui en résulte est parallèle au rayon incident mais repart dans l'autre sens. Si le coin de cube est petit, ce rayon réfléchi est spatialement très proche du rayon incident. Un catadioptré est composé de nombreux tout petits coins de cube. Un émetteur (voiture avec des phares avant par exemple) le reçoit donc dans les yeux, ce qui l'avertit de la présence d'une voiture ou d'un cycliste devant lui.

9. Méthode 1. Notons e l'épaisseur et n le nombre de tours (on le suppose entier, on commet ici une petite erreur). Donc $R + ne = R'$. 1 tour déroule $2\pi R$ longueur de bande, le tour suivant $2\pi(R + e)$, ... le n ième $2\pi(R + (n - 1)e)$. On néglige le petit morceau de bande nécessaire pour monter, d'un tour à l'autre, de l'épaisseur e . En sommant arithmétiquement, $\frac{2\pi(R+e)+2\pi(R+(n-1)e)}{2}n = 2500$ cm. En remplaçant n par $\frac{R'-R}{e}$ on isole $\frac{1}{e}$ puis e qui est (presque) égal à 0,0044 cm, soit la moitié de l'épaisseur d'un cheveu.

Méthode 2. L'aire de la couronne est $\pi(R'^2 - R^2)$. Une fois la bande déroulée on a, toujours vu de profil, un rectangle de largeur e et de longueur 2500 cm. Donc $e = \frac{\pi(R'^2 - R^2)}{2500}$ soit environ 0,0044 cm

10. Partons d'un tableau déjà ordonné horizontalement. Et, sur chaque colonne, intervertissons au besoin les valeurs de la première et de la deuxième ligne. Cela ordonne dans le sens vertical les deux premières lignes. Et on se doute que cela laisse les deux premières lignes bien classées (sinon pour $n = 2$ le résultat de l'énoncé serait faux). Il suffirait alors de répéter cette démarche pour des lignes contiguës (ce qui revient à effectuer un tri bulle colonne par colonne). Revenons donc au cas $n = 2$, qui se réduit à constater que si $x \leq x'$ et $y \leq y'$, alors $\min(x, y) \leq \min(x', y')$ et $\max(x, y) \leq \max(x', y')$.

Exercice 2 (candidats de la voie générale suivant la « spé maths »)*Nous sommes toutes distinctes !***Partie 1 : Exemples et contre-exemples simples**

1. On peut choisir de prendre ou de ne pas prendre chaque élément pour former une somme, soit 2^n possibilités. Mais on s'interdit la somme vide. Il faut donc vérifier que les $2^n - 1$ « vraies » sommes à envisager sont toutes distinctes.

2. Les sommes possibles réalisables avec $\{1,3,5\}$ sont 1, 3, 5, 4, 8, 6, 9 : elles sont toutes distinctes. Avec l'ensemble $\{4,6,7,9\}$ on remarque que $6 + 7 = 4 + 9$.

3. Le singleton $\{0\}$ est un STD. C'est le seul : tout autre ensemble contenant 0 contient un autre élément $a \neq 0$. Mais alors les sommes a et $a + 0$ sont égales.

4.

a. Les sommes formées d'éléments de A sont en particulier des sommes formées d'éléments de B . Elles sont donc toutes distinctes.

b. Par contraposition, B n'est alors pas STD.

5. Pour $A' = A \cup \{\frac{1}{2}\}$: les sommes n'impliquant que des éléments de A sont toutes distinctes. Les sommes associant $\frac{1}{2}$ aussi (elles sont translatées des précédentes). Et les deux ensembles de sommes sont disjoints, sans quoi $\frac{1}{2}$ serait entier.

Pour $A \cup \{\frac{1}{2}, \sqrt{2}\} = A' \cup \{\sqrt{2}\}$. On sait déjà que A' est STD. Donc on procède comme ci-dessus, avec les sommes n'impliquant que A' , les sommes associant $\sqrt{2}$ aussi. Et les deux ensembles de sommes sont disjoints, sans quoi $\sqrt{2}$ serait rationnel.

Partie 2 : Construction d'une suite

On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$ et par la relation de récurrence, valable pour tout $n \geq 1$,

$$u_{n+1} = u_1 + \dots + u_n + 1$$

6. On a $u_2 = 1 + 1 = 2$ et $u_3 = 1 + 2 + 1 = 4$. Puis $u_4 = 1 + 2 + 4 + 1 = 8$ et $u_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 8 + 1 = 16$.

7. On peut éviter d'imbriquer une boucle dans une autre et de manipuler des listes, par exemple comme ceci.

```
def STD(n) : # on choisira n=100
```

```
    s=0
```

```
    u=s+1
```

```
    for k in range(n-1) :
```

```
        s = s + u
```

```
        u = s + 1
```

```
    return u
```

8. De proche en proche, les termes de la suite u sont tous strictement positifs. Donc $u_{n+1} - u_n = (u_1 + \dots + u_{n-1}) + 1 > 0$. La suite croît strictement.

9. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, l'ensemble $\{u_1, \dots, u_n\}$ est STD. On compare deux sommes qui n'impliquent pas exactement les termes. On suppose ces deux sommes égales. On simplifie à gauche et à droite. Les termes qui restent à gauche sont tous distincts de ceux qui restent à droite. Imaginons que la somme de gauche soit celle qui implique le terme de plus haut rang p . On l'isole en basculant tous les autres tout à droite. A droite, on a une somme de termes de la suite, tous distincts, tous de rang $p - 1$ au plus, pondérée

de + ou de -. On la majore par la somme avec les +. On la majore encore en introduisant les termes manquants pour faire apparaître tous les indices de 1 à $p - 1$. Dès lors $u_p \leq u_1 + \dots + u_{p-1}$. Or $u_p = u_1 + \dots + u_{p-1} + 1$. C'est absurde.

10. De proche en proche (c'est une récurrence simple dont on ne demande pas de dire son nom), et par sommation géométrique, $u_n = 2^n$.

Partie 3 : Suites STD

11.

a. On peut créer $2^n - 1$ entiers naturels non nul distincts avec les sommes de u_1, \dots, u_n . Or le plus grand de ces entiers est $u_1 + \dots + u_n$: il est donc supérieur ou égal à $2^n - 1$.

b. Ainsi, puisque $u_2 > u_1$,

$$nu_n > u_1 + \dots + u_n \geq 2^n - 1$$

Nous comparons des entiers. Donc $nu_n \geq 2^n$, puis $u_n \geq \frac{2^n}{n}$.

12.

a. On a $E(X_1) = -1 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = 0$ et $V(X_1) = E(X_1^2) - (E(X_1))^2 = E(X_1^2) = 1 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = 1$ puis, d'après les formules données dans l'énoncé, $E(X) = 0$ et $V(X) = u_1^2 + \dots + u_n^2$.

b. Les 2^n sommes de la forme $\pm u_1 \pm \dots \pm u_n$ sont toutes différentes (par caractère STD, en ajoutant $u_1 + \dots + u_n$, en divisant par 2, et sachant qu'une somme de u_i est strictement positive). En ajoutant $u_1 + \dots + u_n$, on obtient des nombres pairs, donc toutes les sommes ont bien même parité. En échangeant les +1 et les -1 pour un tirage donné, on a la symétrie par rapport à l'origine, et, si on atteignait 0, alors en passant les -1 de l'autre côté de l'égalité, cela contredirait le caractère STD de la suite. Enfin, ces 2^n entiers ont la même probabilité $\frac{1}{2^n}$ d'être atteints, d'où le résultat.

c. Puisque X est centrée, $V(X) = E(X^2)$. Or X^2 prend 2^{n-1} valeurs, chacune avec une probabilité $\frac{1}{2^{n-1}}$, ces valeurs étant des carrés d'entiers naturels non nuls distants d'au moins 2 (puisqu'ils ont même parité). Ainsi,

$$V(X) = u_1^2 + \dots + u_n^2 \geq \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} (2k-1)^2 = \frac{4^n - 1}{3}$$

Or $V(X) = u_1^2 + \dots + u_n^2 \leq nu_n^2$, donc :

$$u_n^2 \geq \frac{1}{n} \frac{4^n - 1}{2^{n-1}} (1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2^n - 1)^2)$$

d. Pour $n = 4$, cette inégalité donne $u_4 \geq 4,6$ et l'inégalité de la question **11.b** donnait $u_4 \geq 4$.

Exercice 3 (candidats de la voie générale ne suivant pas l'enseignement « spé maths » et tous les candidats de la voie technologique)

Pyramides de Pascal

1. On somme dans un sens, dans un autre, puis on moyenne (méthode de Gauss).

2.a. On trouve :

$$\begin{array}{cccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & 5 & & 4 & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & 1 & & 6 & & 2 & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & 4 & & 3 & & 9 & & 7 \end{array}$$

b. Par exemple :

$$\begin{array}{ccc} & & 1 \\ & 2 & & 1 \\ 1 & & 3 & & 2 \end{array}$$

3. Nombre d'entiers dans une pyramide de Pascal

a. On trouve $3 + 2 + 1 = 6$ nombres pour 3 lignes, et $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ nombres pour 4 lignes.

b. Pour n lignes, on a : $n + (n - 1) + \dots + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$ nombres, en utilisant la question 1.

4. Chaque nombre d'une ligne autre que la dernière est inférieur ou égal au plus grand des deux nombres de la ligne inférieure dont il est issu. Il lui est même strictement inférieur puisqu'aucun nombre d'une pyramide parfaite n'est nul. Donc le plus grand est en dernière ligne. Et vaut le nombre de nombres que la pyramide contient, soit $\frac{n(n+1)}{2}$.

5. Après quelques tâtonnements, on trouve par exemple :

$$\begin{array}{ccc} & & 3 \\ & 5 & & 2 \\ 1 & & 6 & & 4 \end{array}$$

6.

a. La symétrisée d'une pyramide de Pascal par rapport à l'axe vertical médiateur est encore une pyramide de Pascal, et échange les termes de droite avec ceux de gauche. D'où le résultat.

b. Le chemin part du sommet x_1 , se connecte (à la ligne 2) à x_2 au détriment de y_2 , puis à x_3 au détriment de y_3 , puis, ..., puis à x_n au détriment de y_n . Remarquons : $x_2 = y_2 + x_1$, $x_3 = y_3 + x_2$, ..., $x_n = y_n + x_{n-1}$. En additionnant il vient $x_n = y_n + y_{n-1} + \dots + y_2 + x_1$. D'une part le nombre x_n est inférieur ou égal à $\frac{n(n+1)}{2}$. D'autre part il est égal à une somme d'entiers naturels distincts distincts. Que cette somme implique un seul élément situé en dehors du segment entier $\llbracket 1, n \rrbracket$ et elle dépassera strictement $\frac{n(n+1)}{2}$. Nécessairement, la somme vaut $\frac{n(n+1)}{2}$ et les termes impliqués décrivent exactement $\llbracket 1, n \rrbracket$. Le chemin étudié par du sommet et aboutit en bas à droite. Il ne peut jamais bifurquer à gauche (il ne pourrait pas rattraper le chemin « perdu ») : rectiligne, il emprunte donc le bord droit.

c. Envisageons le triangle proposé, qui contient $n - 2$ lignes, aucun des nombres du segment $\llbracket 1, n \rrbracket$ et pas non plus le terme $\frac{n(n+1)}{2}$. Partons de son sommet x'_1 et construisons le chemin qui descend en se connectant, comme en question précédente, à chaque fois au plus grand des deux termes situés immédiatement en-dessous. Ce chemin aboutit en x'_{n-2} . En adaptant les notations précédentes, $x'_{n-2} = y'_{n-2} + y'_{n-3} + \dots + y'_2 + x'_1$. Le membre de droite comporte $n - 2$ termes distincts, et chacun de ces termes est supérieur ou égal à $n + 1$. Donc le membre de droite est supérieur ou égal à $(n + 1) + (n + 2) + \dots + (n + (n - 2)) = \frac{3n-1}{2}(n - 2)$. Or le membre de gauche est inférieur ou égal à $\frac{n(n+1)}{2} - 1$. D'où

$$\frac{3n-1}{2}(n-2) \leq \frac{n(n+1)}{2} - 1$$

Il suit $2n^2 - 8n + 3 \leq 0$. Or $2n^2 - 8n + 3 = 2n(n-4) + 3 > 0$ pour $n \geq 4$. D'où le résultat.

INTERNE MENU/GESR