

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune.

Les énoncés des deux parties sont donc séparés, distribués puis ramassés à des moments différents.

Une des deux parties de l'épreuve est constituée des exercices nationaux, l'autre des exercices académiques. À l'issue de la première partie, les énoncés et les copies sont ramassés et une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie à l'issue de laquelle les copies et les énoncés sont également ramassés.

Exercices académiques

Résolution en équipe

Candidats de la voie générale suivant la «spé maths»

Déroulement de l'épreuve constituée des exercices académiques (2 heures) :

Il n'est pas nécessaire de résoudre toutes les questions des deux exercices pour obtenir en fin de compte la note ou une appréciation maximales.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des recherches qu'ils ont pu entreprendre. **Il est également conseillé d'accorder une heure à un premier exercice, puis de passer à son deuxième quitte à revenir ensuite au premier.**

Les règles, compas, rapporteurs, équerre et calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

L'énoncé académique comporte 8 pages.



Exercice 1

Partage convivial

Partie 1 : premier exemple

Pour son anniversaire, Roger a préparé un gâteau. Il a invité des amis, mais il ne sait pas si, au final, ils seront 4, 5 ou 6 convives autour de la table. Pourtant, il décide de couper par avance son gâteau afin que chacun puisse en avoir autant que les autres, qu'ils soient 4, 5 ou 6 convives, et qu'il ne reste plus de gâteau.

Le gâteau est un **disque**.

On appelle **part** un morceau du gâteau situé entre deux coupes successives, et les parts sont coupées **suivant des rayons**. La **taille** d'une part est une fraction de gâteau.

On appelle **portion** la quantité de gâteau que reçoit un convive. Une portion est constituée d'un certain nombre de parts.

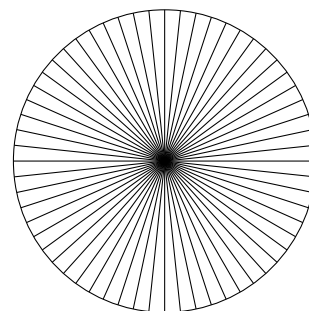
On appelle **partage convivial**, un partage du gâteau en parts qui, une fois effectué, permet de donner la même portion à chaque convive qu'ils soient $n - 1$, n ou $n + 1$ (n entier naturel $n \geq 2$).

Dans cette partie, on a 4, 5 ou 6 convives donc $n = 5$.

Si 4 convives sont présents, chacun aura une portion représentant $\frac{1}{4}$ de gâteau, si 5 convives sont présents, chacun aura une portion représentant $\frac{1}{5}$ de gâteau et si 6 convives sont présents, chacun a une portion représentant $\frac{1}{6}$ de gâteau.

1. **1^{re} stratégie** : Roger décide de couper son gâteau en 60 parts de tailles égales à $\frac{1}{60}$. Montrer que le partage est convivial, en **recopiant** et complétant le tableau suivant :

Nombre de convives	4	5	6
Nombre de parts de gâteau dans chaque portion			



2. **2^e stratégie** : Roger propose de couper son gâteau en seulement 11 parts de tailles différentes (sauf ici pour 2 parts). Les rayons rouges, sur la figure suivante, représentent les découpes. On a laissé apparaître les parts de la première stratégie qui ne seront pas découpées ici.

Voici les tailles des 11 parts :

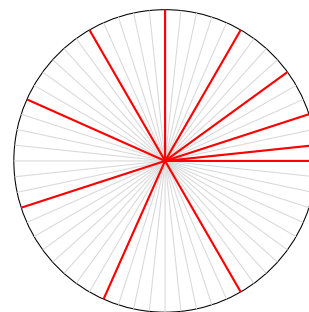
$$\frac{10}{60} \quad \frac{9}{60} \quad \frac{8}{60} \quad \frac{7}{60} \quad \frac{6}{60} \quad \frac{5}{60} \quad \frac{5}{60} \quad \frac{4}{60} \quad \frac{3}{60} \quad \frac{2}{60} \quad \frac{1}{60}.$$

- a) **Cas où le nombre de convives est 4** :

Roger donne au premier convive les parts de tailles $\frac{10}{60}$ et $\frac{5}{60}$ et au deuxième les parts de tailles $\frac{9}{60}$ et $\frac{6}{60}$.

- Montrer que ces parts permettent à ces deux convives d'avoir la même portion de gâteau ;
- Répartir les autres parts aux deux autres convives afin qu'ils mangent la même portion de gâteau.

- b) **Cas où le nombre de convives est 5** : faire une distribution des 11 parts pour chaque convive, afin qu'ils mangent la même portion de gâteau.
- c) **Cas où le nombre de convives est 6** : faire une distribution des 11 parts pour chaque convive, afin qu'ils mangent la même portion de gâteau.
- d) Le partage en ces 11 parts est-il convivial ?



Pour tout entier naturel $n \geq 2$, notons u_n le **nombre minimal de parts d'un partage convivial** entre $n - 1$, n ou $n + 1$ convives.

Remarque : d'après la partie 1, on a $u_5 \leq 11$. En effet, on a trouvé un partage convivial du gâteau en 11 parts pour 4, 5 ou 6 convives mais on ne peut pas affirmer que $u_5 = 11$, c'est-à-dire que 11 soit le minimum de parts pour ce partage convivial.

Partie 2 : cas $n = 2$ et $n = 3$

3. Le cas $n = 2$.

- a) Donner la signification de u_2 .
- b) Justifier que $u_2 \geq 3$.
- c) On suppose ici avoir trouvé un partage convivial en 3 parts.
 - i. Quelle est alors la taille de chaque part lorsque les convives sont 3 ?
 - ii. Ce partage convient-il lorsque les convives ne sont que 2 ?

On en conclut donc que $u_2 \geq 4$.

- d) Donner un partage convivial du gâteau en 4 parts (sous forme de figure ou fractions).
- e) En déduire u_2 .

4. Le cas $n = 3$. Dans cette question, on va montrer que $u_3 = 6$.

- a) Prouver que $u_3 \geq 5$.
- b) On suppose dans cette question qu'il existe un partage convivial en 5 parts entre 2, 3 ou 4 convives.
 - i. Quand les convives sont 4, prouver qu'un convive a une part de plus que les autres (indépendamment de leurs tailles).
 - ii. Quelle est la taille des parts des 3 autres convives ?
 - iii. Trouver alors une contradiction avec le cas où les convives ne sont que 3.
 - iv. En déduire que $u_3 \geq 6$.
- c) Donner un partage convivial en 6 parts dont les tailles sont exprimées en fractions de dénominateurs égaux à 12 et donner la répartition entre les convives dans chaque cas.

Partie 3 : vers une généralisation

Dans cette partie, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

- 5. Prouver que $u_n \geq n + 1$.
- 6. a) Supposons qu'il y ait n convives et qu'un convive n'ait qu'une seule part.

Cette part peut-elle convenir lorsqu'il y a $n + 1$ convives ?

- b) En déduire que $u_n \geq 2n$.

- 7. En considérant les polygones réguliers à $n - 1$, n et $n + 1$ côtés, prouver que $u_n \leq 3n - 2$.
- 8. En déduire un encadrement de u_n .

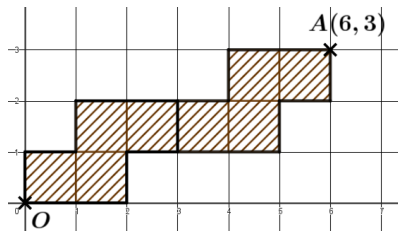
Exercice 2

Segments pixellisés

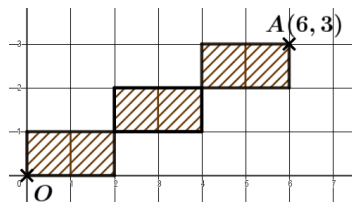
L'objectif de cet exercice est de représenter un segment sur un écran d'ordinateur ou de smartphone à l'aide de pixels.

Les pixels sont des carrés formant un quadrillage régulier que l'on peut munir d'un repère orthonormé.

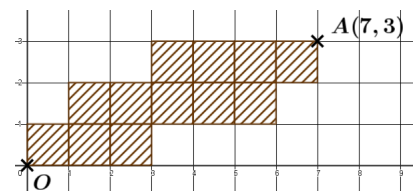
Voici trois manières de représenter un segment reliant l'origine du repère à un point A de coordonnées (x, y) avec x et y deux entiers positifs non nuls.



Exemple 1



Exemple 2



Exemple 3

Les exemples 1 et 2 semblent les plus pertinents à étudier.

Partie 1 - Les motifs

Soient a et b deux entiers naturels non nuls.

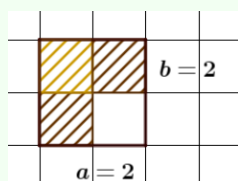
Dans le quadrillage régulier, on considère un rectangle possédant a carrés de large et b carrés de haut.

Définition d'un motif

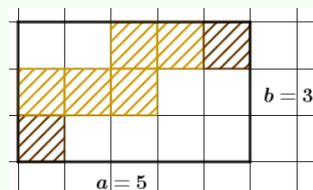
Un motif est un ensemble de pixels que l'on lit de gauche à droite vérifiant les conditions suivantes :

- Son premier pixel est appelé **pixel de départ** et est situé en bas à gauche du rectangle.
- À partir d'un pixel, le pixel suivant est un pixel situé à droite ou au-dessus, les deux pixels ayant un côté en commun.
- Son dernier pixel est appelé le **pixel de fin** et est le pixel situé en haut à droite du rectangle.

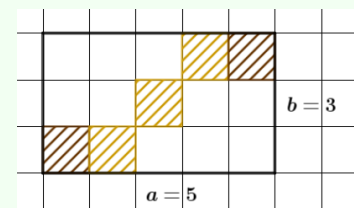
On appelle **taille du motif** le couple (a, b) .



Motif de taille $(2, 2)$



Motif de taille $(5, 3)$



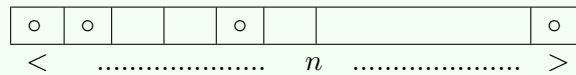
Cet exemple n'est pas un motif

1. Sur l'**annexe 1**, hachurer
 - a) les 2 motifs de taille $(2, 2)$,
 - b) les 3 motifs de taille $(3, 2)$,
 - c) les 10 motifs de taille $(4, 3)$.

Définition des combinaisons

Soient n et p deux entiers naturels tels que $n \geq 1$ et $p \leq n$.

On considère n cases vides comme sur le schéma ci-dessous dans lesquelles on place p jetons identiques avec au plus un jeton par case.



Le nombre de possibilités de placer les p jetons dans les n cases est appelé **combinaison de p parmi n** et est noté $C(n, p)$.

La formule suivante permet de calculer ces nombres pour $p \geq 1$:

$$C(n, p) = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-p+1)}{p \times (p-1) \times (p-2) \times \dots \times 1}$$

De plus, on pose $C(n, 0) = 1$.

On remarquera qu'il y a le même nombre de facteurs au numérateur et au dénominateur.

Par exemple $C(3, 2) = \frac{3 \times 2}{2 \times 1} = 3$ et $C(5, 3) = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10$.

2. On considère un motif de taille (a, b) .

On veut se déplacer du centre du pixel de départ au centre du pixel de fin en n'utilisant que deux déplacements : soit on se déplace de 1 vers la droite, soit on se déplace de 1 vers le haut.

- Justifier qu'il faut utiliser $a + b - 2$ déplacements pour joindre le centre du pixel de départ au centre du pixel de fin.
- En déduire qu'il y a $C(a + b - 2, a - 1)$ motifs différents.

3. Calculer le nombre de motifs de taille $(8, 12)$.

Partie 2 - Les segments pixellisés

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé. Soient x et y deux entiers naturels non nuls.

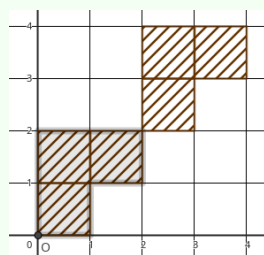
On appelle O l'origine du repère et on note A le point de coordonnées (x, y) .

Définition d'un segment pixellisé

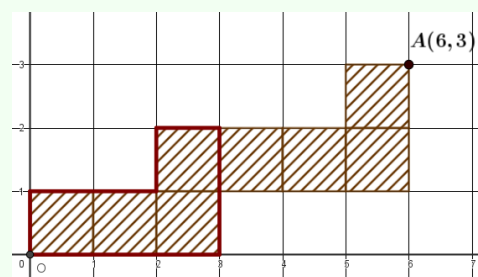
Un segment pixellisé reliant O à A est un ensemble de pixels formé par la répétition de gauche à droite d'un **même** motif tel que :

- Le premier motif a pour pixel de départ le pixel dont le sommet inférieur gauche est le point O .
- Pour deux motifs successifs, le pixel de départ du motif de droite est situé à droite en haut du pixel de fin du motif de gauche. Ainsi ces deux pixels n'ont qu'un sommet en commun.
- Le dernier motif a pour pixel de fin le pixel dont le sommet supérieur droit est le point A .

On note R le **nombre de répétitions** du motif.



Exemple de segment pixellisé avec un motif de taille $(2, 2)$ et $R = 2$



Contre-exemple où le motif de taille $(3, 2)$ n'est pas répété correctement

Rappel sur les diviseurs communs

Soient m et n deux entiers naturels non nuls.

On appelle diviseur commun tout entier naturel qui est à la fois un diviseur de m et de n .

4.
 - a) Justifier que R est un diviseur commun de x et de y .
 - b) Quelle est alors la taille du motif?
5. On pose $(x, y) = (4, 8)$.
 - a) Donner les trois possibilités de taille de motif.
 - b) Sur l'**annexe 2.1**, tracer un segment discret pour chacune de ces possibilités.
6. On pose $(x, y) = (12, 24)$.
 - a) Donner les possibilités de taille de motif.
 - b) Sur l'**annexe 2.2**, tracer un segment discret pour chacune de ces possibilités.

Partie 3 - Les segments pixellisés réguliers

On rappelle que pour un segment pixellisé, R désigne le nombre de répétitions de son motif de taille (a, b) .
On cherche dans cette partie à rendre le tracé du segment le plus "droit" possible.

Rappel sur le pgcd

Soit m et n deux entiers naturels non nuls.

Parmi tous les diviseurs communs de m et n , il en existe un plus grand appelé le plus grand commun diviseur de m et de n . Celui-ci est noté $\text{pgcd}(m, n)$.

$\text{pgcd}(m, n)$ peut être égal à 1.

Définition d'un segment pixellisé régulier

On considère qu'un segment pixellisé est régulier si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

R est maximal et b est minimal.

Soient x et y deux entiers naturels non nuls.

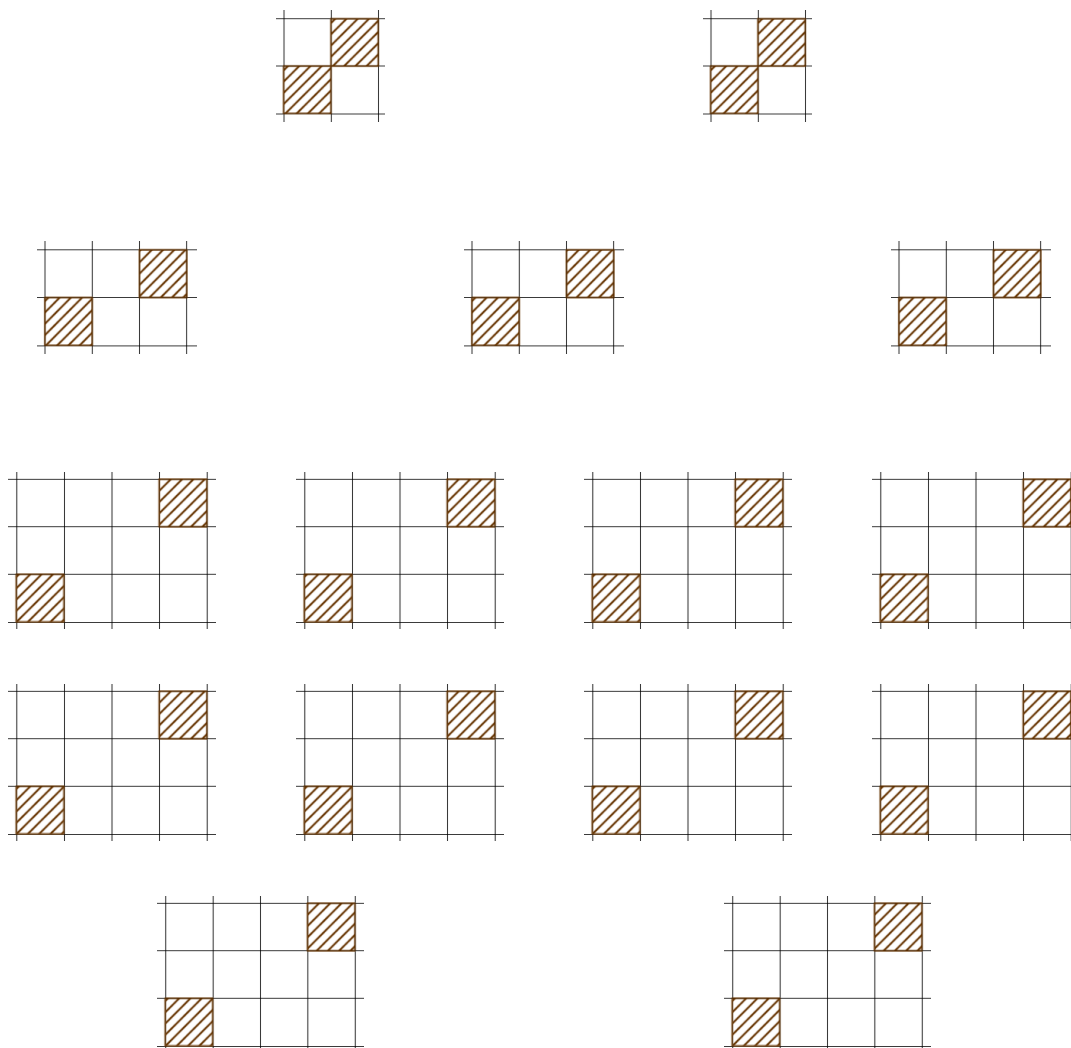
On considère dans cette partie uniquement des segments pixellisés réguliers.

7. Quel est le motif d'un segment si $x = y$?
8. Justifier que $R = \text{pgcd}(x, y)$.
9. On pose $(x, y) = (8, 12)$.
 - a) Déterminer R et la taille du motif.
 - b) Sur l'**annexe 3**, tracer deux exemples de segments
10. Déterminer l'ensemble des couples (x, y) tel que $R = 4$ et $a = 5$.

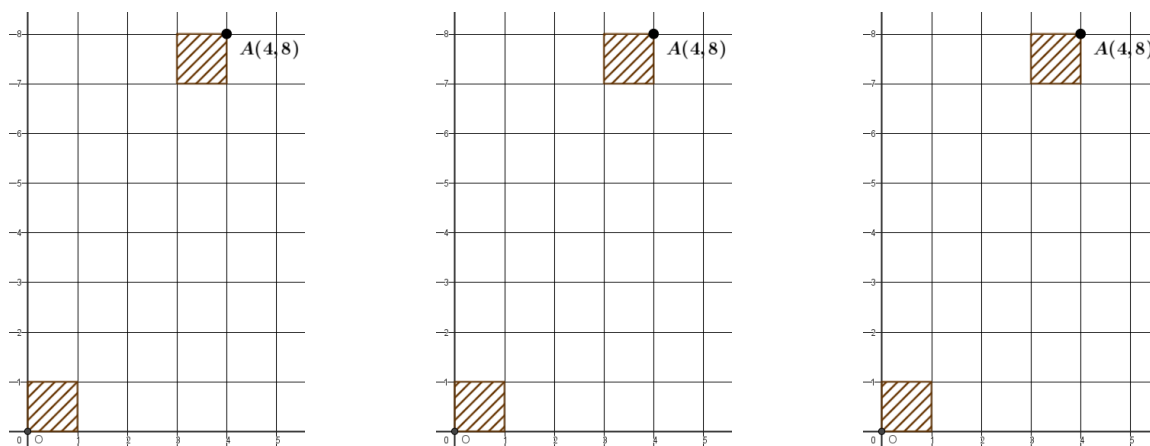
Annexes de l'exercice «Segments pixellisés»

À rendre avec la copie

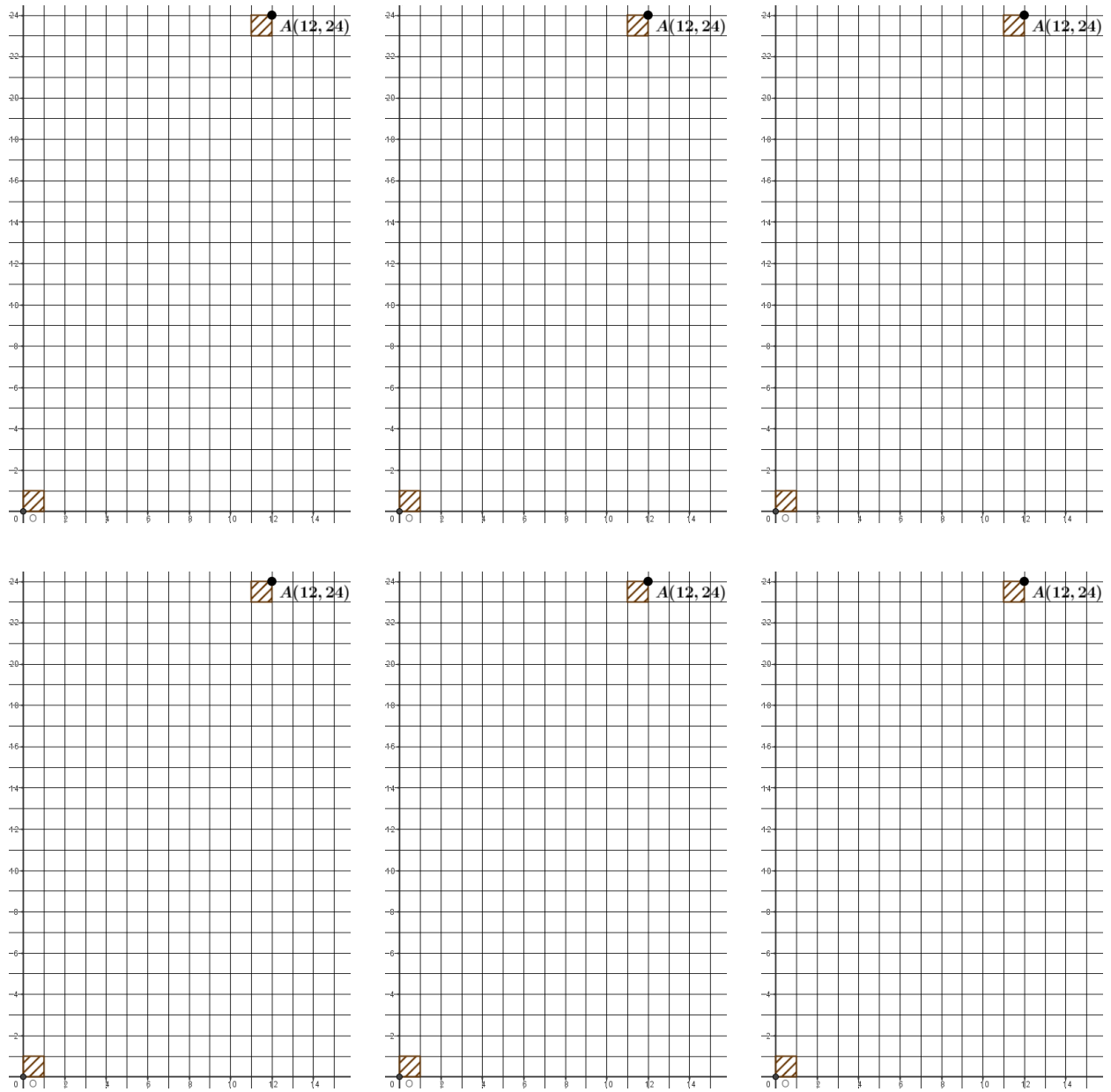
Annexe 1



Annexe 2.1



Annexe 2.2



Annexe 3

