

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune.

Les énoncés des deux parties sont donc séparés, distribués puis ramassés à des moments différents.

Une des deux parties de l'épreuve est constituée des exercices nationaux, l'autre des exercices académiques. À l'issue de la première partie, les énoncés et les copies sont ramassées et une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie à l'issue de laquelle les copies et les énoncés sont également ramassés.

## Exercices académiques

### Résolution individuelle

#### Candidats de la voie générale suivant la «spé maths»

Déroulement de l'épreuve constituée des exercices académiques (2 heures) :

Il n'est pas nécessaire de résoudre toutes les questions des deux exercices pour obtenir en fin de compte la note ou une appréciation maximales.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des recherches qu'ils ont pu entreprendre. **Il est également conseillé d'accorder une heure à un premier exercice, puis de passer à son deuxième quitte à revenir ensuite au premier.**

Les règles, compas, rapporteurs, équerre et calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

**Les énoncés doivent être rendus** au moment de quitter définitivement la salle de composition.

L'énoncé académique comporte 8 pages.



## Exercice 1

### Un programme musclé

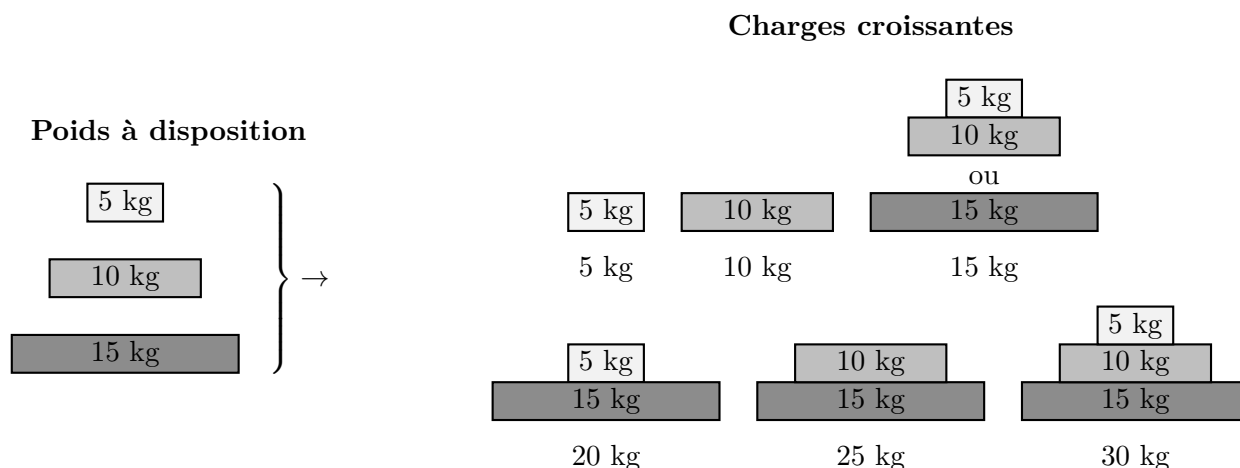
Un sportif décide de suivre un programme de musculation.

Il souhaite acheter des disques en acier, **de poids tous différents**, qu'il pourra ensuite empiler afin de les soulever progressivement et de façon croissante.

On appelle **charge** la somme des poids à soulever au fur et à mesure des empilements de disques.

Exemple :

Si le sportif achète un disque de 5 kg, un disque de 10 kg et un disque de 15 kg pour son programme de musculation, il pourra alors soulever successivement et de façon croissante les charges de 5 kg ; 10 kg ; 15 kg ; 20 kg ; 25 kg et 30 kg (voir illustration ci-dessous).



Définitions et notations :

- (5; 10; 15) est la **liste des poids** à disposition dans l'ordre croissant.
- [5; 10; 15; 20; 25; 30] est la **liste des charges croissantes** du programme de musculation.  
Remarque : si une charge peut être obtenue de plusieurs façons (comme la charge de 15 kg dans l'exemple donné), elle ne sera notée qu'une fois dans le programme de musculation.
- (5; 10; 15) → [5; 10; 15; 20; 25; 30] est la **correspondance entre la liste des poids et la liste des charges croissantes** du programme de musculation.
- On appelle **pas** entre deux charges consécutives  $C_1$  et  $C_2$  la différence  $C_2 - C_1$ .
- Si tous les pas d'une liste de charges sont égaux, le programme de musculation est dit **régulier** sinon il est dit **irrégulier**.

En reprenant l'exemple précédent, la correspondance entre la liste des poids et la liste des charges croissantes est : (5; 10; 15) → [5; 10; 15; 20; 25; 30] et le programme de musculation est régulier de pas égaux à 5.

Autre exemple : on considère la correspondance (1; 3; 4) → [1; 3; 4; 5; 7; 8]. Les pas sont successivement égaux à 2, 1, 1, 2, 1 : le programme de musculation est donc irrégulier, avec un pas minimum de 1 et un pas maximum de 2.

## Partie 1 : premiers exemples

Pour chacune des listes de poids ci-dessous, déterminer si le programme de musculation correspondant est régulier en précisant la valeur des pas constants, ou s'il est irrégulier en précisant la valeur du pas minimum et la valeur du pas maximum.

1. a. (10; 15; 20)                      b. (1; 2; 3)                      c. (2; 4; 6)                      d. (3; 5; 7)

## Partie 2 : poids entiers consécutifs et poids entiers pairs

2. La liste de poids (1; 2; 3; 4) permet-elle un programme de musculation régulier ? Justifier.
3. Pour tout entier naturel  $n \geq 3$ , on note (1; 2; 3; ...;  $n$ ) la liste des poids entiers compris entre 1 et  $n$ .
- a) Si le sportif n'utilise qu'un seul disque à la fois, quelle est la liste des charges correspondantes ?
- b) Montrer qu'en utilisant deux disques, il est possible de former toutes les charges entières comprises entre  $(n + 1)$  et  $(2n - 1)$ .
- c) Montrer qu'en utilisant trois disques, il est possible de former toutes les charges entières comprises entre  $2n$  et  $(3n - 3)$ .
- d) On note  $S = 1 + 2 + \dots + n$  la somme de tous les poids.

Montrer que le programme de musculation associé à la liste des poids (1; 2; 3; ...;  $n$ ) est formé de toutes les charges entières comprises entre 1 et  $S$  (et donc régulier de pas constants égaux à 1).

4. Soit la liste des poids pairs (2; 4; ...;  $2n$ ) : le programme de musculation est-il régulier ? Justifier.

## Partie 3 : poids entiers impairs

5. Pour chacune des listes de poids ci-dessous, déterminer si le programme de musculation est régulier ou irrégulier.
- a. (1; 3)                      b. (1; 3; 5)                      c. (1; 3; 5; 7)

6. Plus généralement, soit  $n$  un entier **impair** supérieur ou égal à 3.

On note (1; 3; 5; ...;  $n$ ) la liste des poids impairs compris entre 1 et  $n$ , et on pose  $T = 1 + 3 + 5 + \dots + n$ .

Montrer que les charges 2 et  $(T - 2)$  ne font pas partie du programme de musculation.

(Remarque : il est possible de montrer que 2 et  $(T - 2)$  sont les seules charges entières comprises entre 1 et  $T$  ne faisant pas partie du programme musculation, mais il n'est pas demandé dans cette question de montrer que ce sont bien les seules).

## Partie 4 : programmes de musculation réguliers utilisant deux ou trois disques

Le sportif décide d'acheter trois disques distincts au maximum pour son programme de musculation, donc soit deux poids  $(a; b)$  avec  $a < b$ , soit trois poids  $(a; b; c)$  avec  $a < b < c$  où  $a, b, c$  sont des réels strictement positifs.

7. Montrer que les listes de deux poids distincts  $(a; b)$  permettant un programme de musculation régulier sont celles de la forme  $(a; 2a)$  (autrement dit celles telles que  $b = 2a$ ).
8. Déterminer les listes de trois poids distincts  $(a; b; c)$  permettant un programme de musculation régulier.

(Le candidat pourra distinguer les cas où  $c = a + b$ , puis  $c > a + b$  puis  $c < a + b$ ).

## Exercice 2

### Fractales

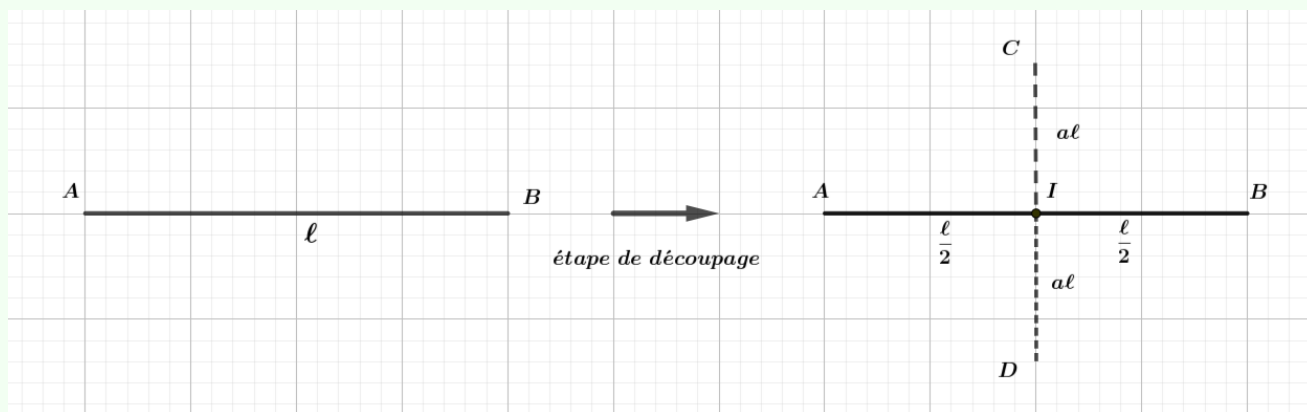
Cet exercice a pour but de réaliser une figure géométrique obtenue en répétant une même construction géométrique simple. La figure obtenue est appelée une fractale.

#### Définition de l'étape de découpage

Soit  $a$  un réel positif vérifiant  $0 < a < \frac{1}{2}$ .

Pour **chacun** des segments horizontaux ou verticaux de la figure, on crée 4 nouveaux segments plus petits en procédant de la manière suivante :

- on considère un segment  $[AB]$  de longueur  $\ell$ ,
- on coupe ce segment en son milieu noté  $I$  et l'on crée ainsi 2 nouveaux segments  $[AI]$  et  $[IB]$  de longueur  $\frac{\ell}{2}$ ,
- sur la médiatrice de ce segment, on crée 2 nouveaux segments  $[CI]$  et  $[ID]$  de longueur  $a\ell$ .



#### Définition d'une fractale de rang $n$

Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 0.

On considère un segment de départ horizontal de longueur  $L > 0$ .

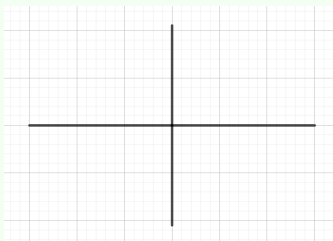
**Une fractale de rang  $n$**  notée  $F_n$  est la figure obtenue en répétant  $n$  fois l'étape de découpage.

Ainsi  $F_0$  est simplement le segment de départ.

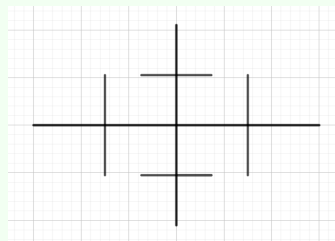
Voici les trois premières fractales pour un segment de départ de longueur  $L = 6$  avec  $a = 0,35$  :



$F_0$  comporte 1 segment



$F_1$  comporte 4 segments :  
2 horizontaux et 2 verticaux



$F_2$  comporte 16 segments :  
8 horizontaux et 8 verticaux

On considère un segment de départ de longueur  $L = 48$  avec  $a = \frac{1}{4}$ .

Partie 1 : des constructions et des longueurs

- 1. Sur l'annexe 1, les deux premières fractales  $F_0$  et  $F_1$  sont tracées.
  - a) Compléter la fractale  $F_2$ .
  - b) Compléter la fractale  $F_3$  dont une grande partie des segments sont déjà tracés.

On décide de ranger les différents segments par taille : la taille 0 représente les plus grands segments, la taille 1 représente les segments plus petits.

On peut classer les 4 segments de  $F_1$  dans le tableau suivant :

|                    |    |    |
|--------------------|----|----|
| taille             | 0  | 1  |
| longueurs          | 24 | 12 |
| nombre de segments | 2  | 2  |

- 2. a) Quelles sont les 3 longueurs possibles pour les 16 segments de la fractale  $F_2$  ?  
b) **Recopier et compléter le tableau** suivant permettant de classer des plus grands aux plus petits les segments de la fractale  $F_2$  :

|                    |   |   |   |
|--------------------|---|---|---|
| taille             | 0 | 1 | 2 |
| longueurs          |   |   |   |
| nombre de segments |   |   |   |

Partie 2 : les différents segments

Soit  $n$  un entier naturel.  
Nous allons compter le nombre de segments de la fractale  $F_n$  qui sont de même longueur.  
Les différentes longueurs sont classées de manière décroissante par la taille qui varie de 0 (les segments les plus grands) jusqu'à  $n$  (les segments les plus petits).

**Le triangle des segments :**

On construit un tableau triangulaire.  
Chaque ligne de ce tableau permet de compter pour la fractale  $F_n$ , le nombre de segments ayant la taille  $p$ ,  $p$  étant un entier compris entre 0 à  $n$ .

Le nombre situé à la ligne  $n$  et à la colonne  $p$  est noté  $S(n, p)$ .  
Par exemple,  $S(2, 1)$  représente le nombre de segments de la fractale  $F_2$  dont la taille n'est ni la plus grande, ni la plus petite.

| $n \backslash p$ | 0        | 1   | 2   | 3   | ...      |
|------------------|----------|-----|-----|-----|----------|
| 0                | 1        |     |     |     |          |
| 1                | 2        | 2   |     |     |          |
| 2                | ...      | ... | ... |     |          |
| 3                | ...      | ... | ... | ... |          |
| $\vdots$         | $\vdots$ |     |     |     | $\ddots$ |

- 3. a) Justifier rapidement que  $S(0, 0) = 1$  et  $S(1, 0) = S(1, 1) = 2$ .  
b) Sur l'annexe 2, compléter le tableau pour les lignes  $n = 1$  à  $n = 3$ .
- 4. Justifier que  $S(n, 0) = S(n, n) = 2^n$ .
- 5. On admet pour  $p < n$  la relation suivante :

$$S(n + 1, p + 1) = 2 \times (S(n, p) + S(n, p + 1))$$

Compléter le tableau de l'annexe 2 jusqu'à la ligne  $n = 5$ .

## Partie 3 : les différentes longueurs

### Le triangle des longueurs :

On construit un second tableau triangulaire.

Chaque ligne de ce tableau permet d'indiquer pour la fractale  $F_n$ , la longueur des segments selon leur taille  $p$ ,  $p$  étant un entier compris entre 0 à  $n$ .

Le nombre situé à la ligne  $n$  et à la colonne  $p$  est noté  $L(n, p)$ . Par exemple,  $L(2, 1)$  est la longueur des segments de la fractale  $F_2$  ayant une taille égale à 1.

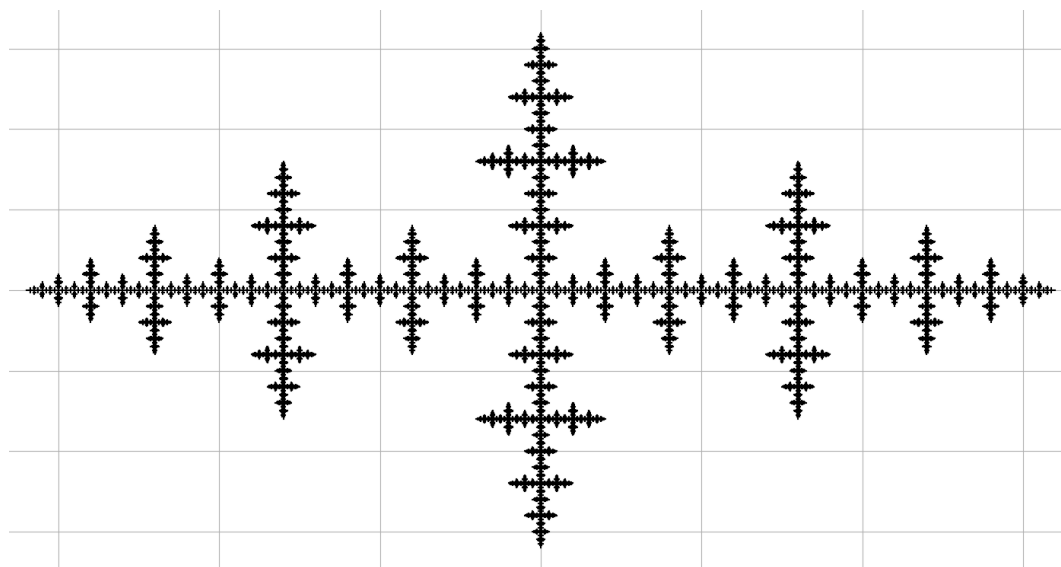
| $n \backslash p$ | 0        | 1   | 2   | 3   | ...      |
|------------------|----------|-----|-----|-----|----------|
| 0                | 48       |     |     |     |          |
| 1                | 24       | 12  |     |     |          |
| 2                | ...      | ... | ... |     |          |
| 3                | ...      | ... | ... | ... |          |
| $\vdots$         | $\vdots$ |     |     |     | $\ddots$ |

6. a) Justifier que  $L(0, 0) = 48$  et  $L(1, 0) = 24$  et  $L(1, 1) = 12$ .  
b) Sur l'**annexe 3**, compléter le triangle des longueurs pour les lignes  $n = 1$  à  $n = 3$ .
7. Justifier que  $L(n, 0) = \frac{48}{2^n}$ .
8. a) Justifier que la ligne  $n + 1$  du tableau comporte une taille de plus que la ligne  $n$ .  
b) En déduire la relation  $L(n + 1, p + 1) = \frac{1}{4}L(n, p)$ .  
c) **Compléter le tableau de l'annexe 3** jusqu'à la ligne  $n = 5$  en arrondissant à 0,0001 près si besoin.

## Partie 4 : de l'infini dans du fini

9. a) Justifier que la somme des longueurs des segments est multipliée par  $\frac{3}{2}$  à chaque étape de découpage.  
b) Le segment de départ a pour longueur 48 mm.  
Quelle est la somme des longueurs des segments de la fractale  $F_8$  exprimée en cm ?  
c) À partir de quelle valeur de  $n$ , la somme des longueurs des segments de  $F_n$  dépassera la distance Terre-Jupiter qui vaut environ 591 millions de kilomètres ?

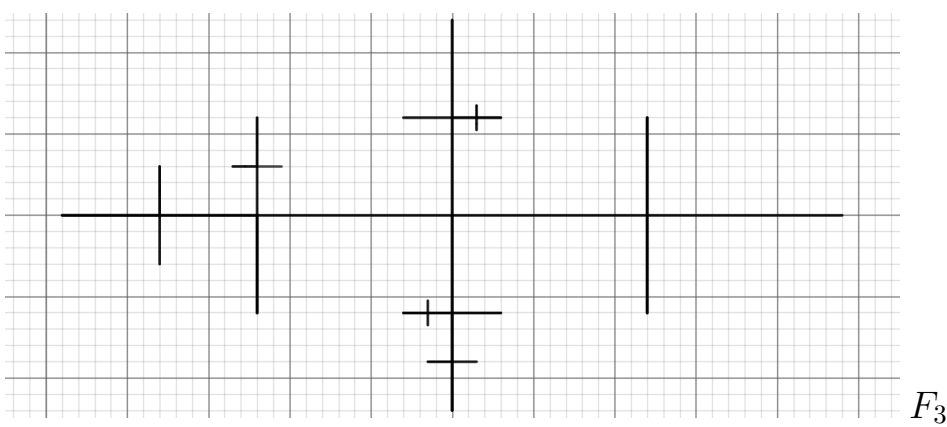
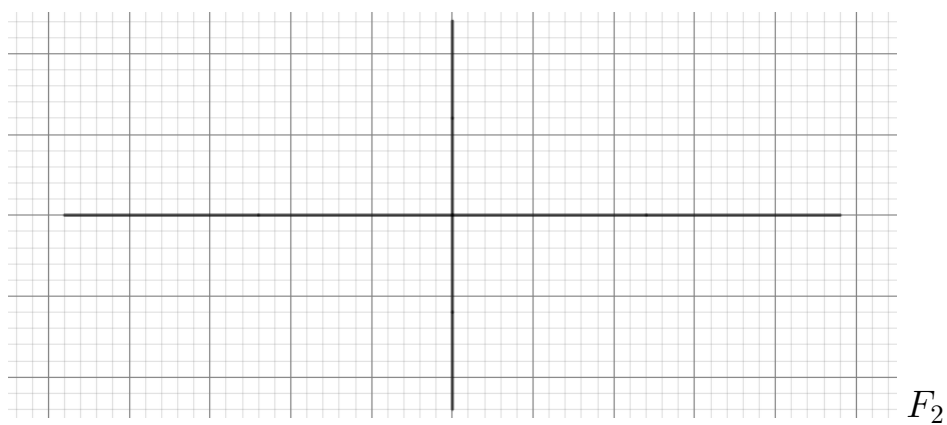
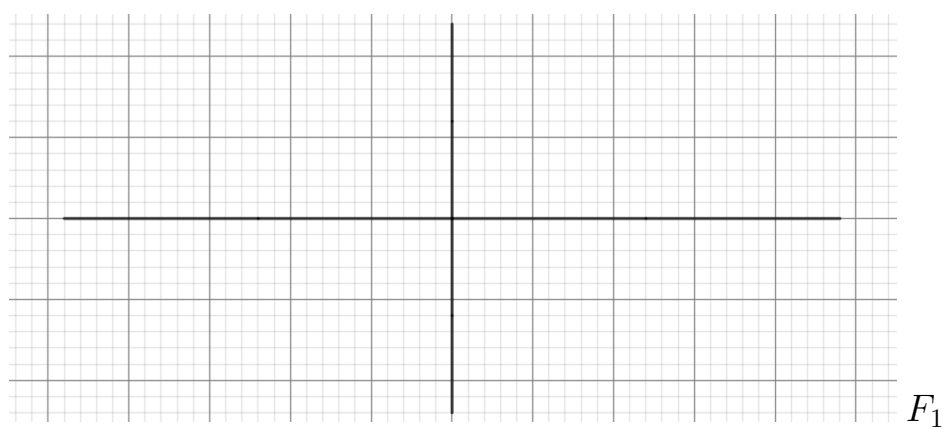
Voici pour illustrer le sujet la fractale  $F_8$  :



# Annexes de l'exercice «Fractales».

À rendre avec la copie.

## Annexe 1



Annexe 2 : Le triangle des segments

| $n \backslash p$ | 0   | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   |
|------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 0                | 1   |     |     |     |     |     |
| 1                | 2   | 2   |     |     |     |     |
| 2                | ... | ... | ... |     |     |     |
| 3                | ... | ... | 24  | ... |     |     |
| 4                | ... | 64  | ... | ... | ... |     |
| 5                | ... | ... | ... | ... | ... | ... |

Annexe 3 : Le triangle des longueurs

| $n \backslash p$ | 0   | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   |
|------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 0                | 48  |     |     |     |     |     |
| 1                | 24  | 12  |     |     |     |     |
| 2                | ... | ... | ... |     |     |     |
| 3                | ... | ... | 1.5 | ... |     |     |
| 4                | ... | 1.5 | ... | ... | ... |     |
| 5                | ... | ... | ... | ... | ... | ... |