MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
Liberté Égalité Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques 2025

ACADÉMIE DE NICE
Liberté Égalité Fraternité

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune.

Les énoncés des deux parties sont donc séparés, distribués puis ramassés à des moments différents.

Une des deux parties de l'épreuve est constituée des exercices nationaux, l'autre des exercices académiques. À l'issue de la première partie, les énoncés et les copies sont ramassées et une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie à l'issue de laquelle les copies et les énoncés sont également ramassés.

Exercices académiques

Résolution en équipe

Candidats de la voie générale N'ayant PAS choisi l'enseignement de spécialité mathématiques, et TOUS ceux de la voie technologique (STI2D, STL, ST2S, STMG, STHR, STD2A, STAV, S2TMD, etc.)

Déroulement de l'épreuve constituée des exercices académiques (2 heures) :

Il n'est pas nécessaire de résoudre toutes les questions des deux exercices pour obtenir en fin de compte la note ou une appréciation maximales.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des recherches qu'ils ont pu entreprendre. **Il est également conseillé d'accorder une heure à un premier exercice, puis de passer à son deuxième quitte à revenir ensuite au premier.**

Les règles, compas, rapporteurs, équerre et calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

L'énoncé académique comporte 7 pages.

Exercice 1

Gamme musicale

Partie 1 : construction des octaves

On introduit la notion d'octave :

> Étant donnée une fréquence $f_0 \in]0, +\infty[$,
>
> ▷ La fréquence $f_1 = 2f_0$ est dite **une octave au-dessus** de f_0 lorsqu'on monte d'une octave, de f_0 à f_1.
>
> ▷ La fréquence f_0 est dite **une octave en dessous** de f_1 lorsqu'on descend d'une octave, de f_1 à f_0.
>
> L'intervalle $[f_0, 2f_0]$ est un **intervalle de référence**.

1. Compléter, dans l'**annexe 1** (**à rendre avec la copie**), le tableau des octaves successives en dessous et au-dessus de la fréquence $f_0 = 440$.
2. Compléter l'axe gradué, dans l'**annexe 2**, en y représentant les valeurs 110 et 880.
3. a) Soit un entier $n \in \mathbb{N}$. Justifier que la n-ième octave au-dessus de $f_0 = 440$, notée f_n^+ vérifie :

$$f_n^+ = 2^n f_0.$$

   Proposer de même une formule pour la n-ème octave en dessous de f_0, notée f_n^-.

   b) Calculer l'écart $f_{n+1}^+ - f_n^+$ entre deux octaves successives. Est-il constant ?

Partie 2 : construction des quintes

On définit aussi la notion de quinte :

> Etant donnée une fréquence $f_0 \in]0, +\infty[$, on définit la **quinte au-dessus** de f_0 comme la fréquence $q_1 = \dfrac{3}{2} f_0$.
>
> La fréquence f_0 est alors **une quinte en dessous** de q_1.

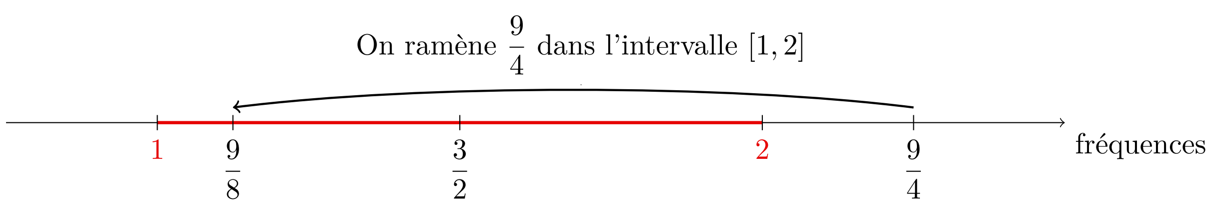
4. Si $q_1 = \dfrac{3}{2} f_0$, exprimer f_0 en fonction de q_1.

Pour des raisons de simplicité, dans les questions qui suivent, on fixe $f_0 = 1$. L'intervalle de référence associé est alors l'intervalle $[1, 2]$.

On calcule les quintes successives, de la forme $\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$, avec $n \in \mathbb{N}$, et on les ramène dans l'intervalle $[1, 2]$ en descendant le bon nombre d'octaves. Par exemple :

— Pour la première quinte, $n = 1$, la fréquence $\dfrac{3}{2}$ est déjà dans l'intervalle $[1, 2]$: inutile de changer d'octave.

— Pour la deuxième quinte, $n = 2$, la fréquence $\left(\dfrac{3}{2}\right)^2$ vaut $\dfrac{9}{4} = 2,25$, elle n'est pas dans l'intervalle $[1, 2]$. On l'y ramène en descendant d'une octave, puisque $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{9}{4} = \dfrac{9}{8} \in [1, 2]$:



5. Compléter, dans l'**annexe 3**, le tableau des quintes successives, ramenées dans l'intervalle de référence $[1, 2]$, en descendant du bon nombre d'octaves.
6. On reprend le calcul des quintes effectuées à la question précédente. On observe que les valeurs trouvées ne sont pas dans l'ordre croissant.

   Compléter le tableau, dans l'**annexe 4**, afin d'ordonner les quintes successives dans l'ordre croissant.
7. Une gamme est un ensemble fini de fréquences dans l'intervalle de référence $[1, 2]$. Il est standard de s'arrêter à 12 quintes (ramenées dans l'intervalle $[1, 2]$), et de considérer que la 12^{e} quinte correspond à 7 octaves ce qui se traduit mathématiquement par l'égalité :

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} = 2^7.$$

   En s'aidant de la calculette, commenter cette égalité.
8. De manière plus générale, supposons que n quintes donnent la même fréquence que p octaves, pour deux entiers $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$. Montrer qu'on aurait alors

$$3^n = 2^{n+p}.$$

   Conclure à une absurdité.

Partie 3 : couper un intervalle en deux

On souhaite couper un intervalle de référence en parties équilibrées, mais au sens de la multiplication.

> Etant donnés deux réels positifs a et b, on définit leur **moyenne géométrique** c comme le réel positif vérifiant
> $$\frac{c}{a} = \frac{b}{c}.$$

9. Montrer que c vérifie $c = \sqrt{ab}$.
10. Etant donnée une fréquence $f_0 > 0$, exprimer la moyenne géométrique de l'intervalle $[f_0, 2f_0]$ en fonction de f_0.
11. a) Justifier que le milieu de l'intervalle $[f_0, 2f_0]$ est égal à la première quinte au-dessus de f_0.
    b) Comparer cette valeur avec la moyenne géométrique de l'intervalle $[f_0, 2f_0]$ trouvée ci-dessus.

Exercice 2

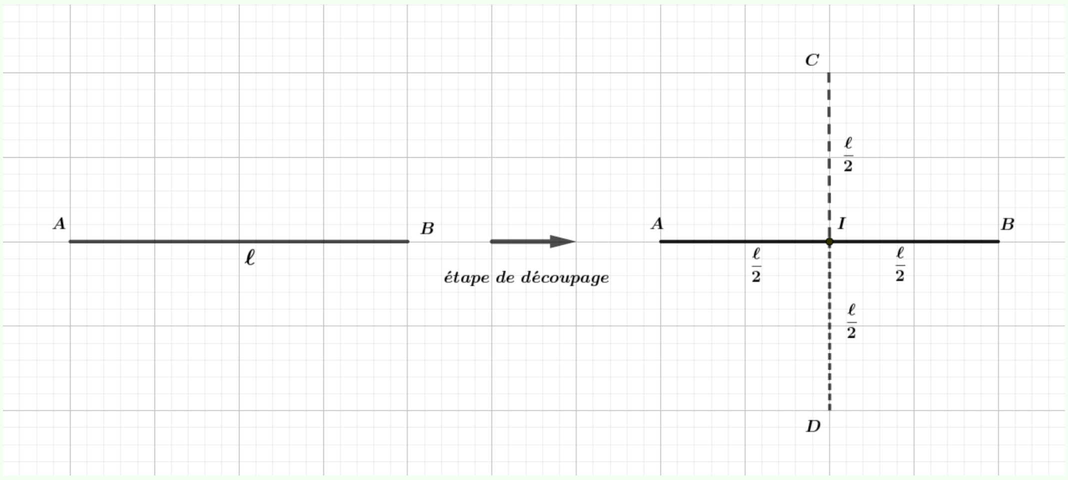
Fractales

Cet exercice a pour but de réaliser une figure géométrique obtenue en répétant une même construction géométrique simple. La figure obtenue est appelée une fractale.

Définition de l'étape de découpage

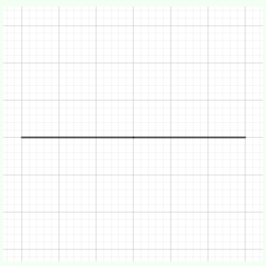
Pour **chacun** des segments horizontaux ou verticaux de la figure, on crée 4 nouveaux segments plus petits en procédant de la manière suivante :

- on considère un segment $[AB]$ de longueur ℓ,
- on coupe ce segment en son milieu noté I et l'on crée ainsi 2 nouveaux segments $[AI]$ et $[IB]$ de longueur $\dfrac{\ell}{2}$,
- sur la médiatrice de ce segment, on crée 2 nouveaux segments $[CI]$ et $[ID]$ de longueur $\dfrac{\ell}{2}$.

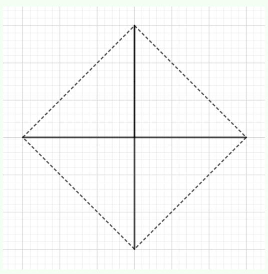


Définition d'une fractale de rang n

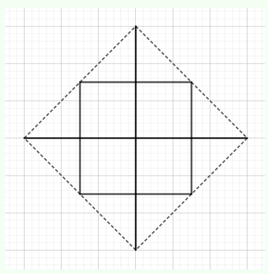
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 0.
On considère un segment de départ horizontal de longueur $L > 0$.
Une fractale de rang n notée F_n est la figure obtenue en réitérant n fois l'étape de découpage.
Ainsi F_0 est simplement le segment de départ.
Voici les trois premières fractales correspondantes pour un segment de départ de longueur $L = 6$:



F_0 comporte 1 segment



F_1 comporte 4 segments :
2 horizontaux et 2 verticaux



F_2 comporte 16 segments :
8 horizontaux et 8 verticaux

On appelle **contour** le carré formé à partir de 4 extrémités des segments de F_1.
Ce carré est tracé ci-dessus en pointillés pour les fractales F_1 et F_2.

1. Sur l'annexe **à rendre avec la copie**, les trois premières fractales F_0, F_1 et F_2 sont tracées.
   Compléter les fractales F_3 et F_4.

Partie 1 : Étude des plus petits triangles isocèles

Pour $n \geqslant 2$, la fractale F_n fait apparaître des triangles isocèles ayant leur hypoténuse sur le contour de la fractale. Nous allons nous intéresser aux plus petits d'entre eux.
Sur l'annexe, un de ces petits triangles isocèles est coloré en rouge pour les fractales F_2, F_3 et F_4.

2. a) Combien de petits triangles isocèles comporte la fractale F_3 ?
   Hachurer les triangles manquants.
   b) Combien de petits triangles isocèles comporte la fractale F_4 ?
   Hachurer les triangles manquants.

3. Soit $n \geqslant 2$. On note T_n le nombre de petits triangles isocèles de la fractale F_n.
   a) En considérant un des petits triangles isocèles et une étape de découpage, exprimer T_{n+1} en fonction de T_n.
   b) En déduire que $T_n = 2^{n+1}$.
   c) On admet que le petit côté d'un de ces petits triangles isocèles a pour longueur $\dfrac{L}{2^n}$.
   Montrer que l'aire totale notée A_n formée par la réunion des petits triangles isocèles de la fractale F_n est $A_n = \dfrac{L^2}{2^n}$.
   d) Pour $L = 6$, calculer A_6 puis déterminer à partir de quelle valeur de n, $A_n < 10^{-9}$.

Partie 2 : Étude des plus petits carrés

Pour $n \geqslant 2$, la fractale F_n fait apparaître également des carrés. Nous allons nous intéresser aux plus petits d'entre eux.
Sur l'annexe, un de ces petits carrés est coloré en bleu pour les fractales F_2, F_3 et F_4.

4. a) Combien de petits carrés comporte la fractale F_3 ?
   b) Combien de petits carrés comporte la fractale F_4 ?

5. Soit $n \geqslant 2$. On s'intéresse au nombre de petits carrés contenus dans la fractale F_n.
   a) Justifier que l'aire du contour est $\dfrac{L^2}{2}$.
   b) Justifier que l'aire totale formée par la réunion des petits carrés est $\dfrac{L^2}{2^n}(2^{n-1} - 1)$.
   c) Déterminer l'aire d'un petit carré en fonction de L.
   d) En déduire le nombre de petits carrés contenus dans la fractale F_n puis dans la fractale F_6.

Partie 3 : De l'infini dans du fini

6. Justifier qu'à chaque étape de découpage, la somme des longueurs des segments d'une fractale double.

7. Soit $L = 6$ cm. Quelle est la somme des longueurs des segments de la fractale F_{44} ?
   Combien de fois cette somme représente-t-elle en choisissant comme unité la distance Terre-Soleil ?
   On prendra 150 millions de kilomètres pour la distance Terre-Soleil .

Annexes de l'exercice «Gamme musicale».

À rendre avec la copie.

Annexe 1

Numéro de l'octave au-dessus ou au-dessous de f_0	1	2	3	4
Fréquence de l'octave au-dessus correspondante	880			
Fréquence de l'octave au-dessous correspondante	220			

Annexe 2

Annexe 3

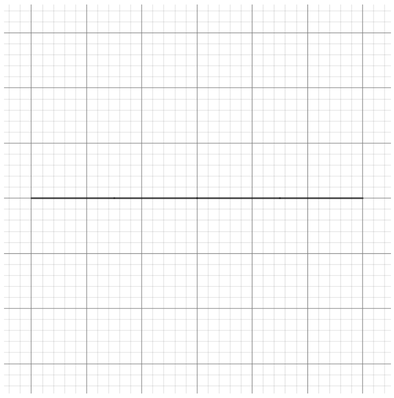
Numéro n de la quinte	1	2	3	4	5	6
Fréquence de la n-ième quinte	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{27}{8}$			
Fréquence ramenée dans l'intervalle $[1, 2]$	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{27}{16}$			
Valeur approchée à 10^{-2}	1,5	1,13	1,69			

Annexe 4

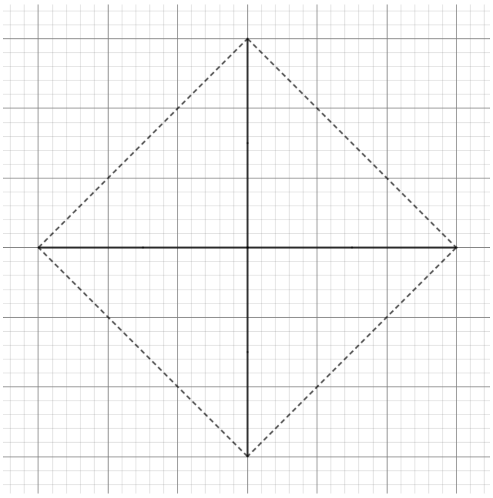
Numéro n de la quinte ordonnée	2	4				
Valeur approchée à 10^{-2}	1,13					

Annexes de l'exercice «Fractales».

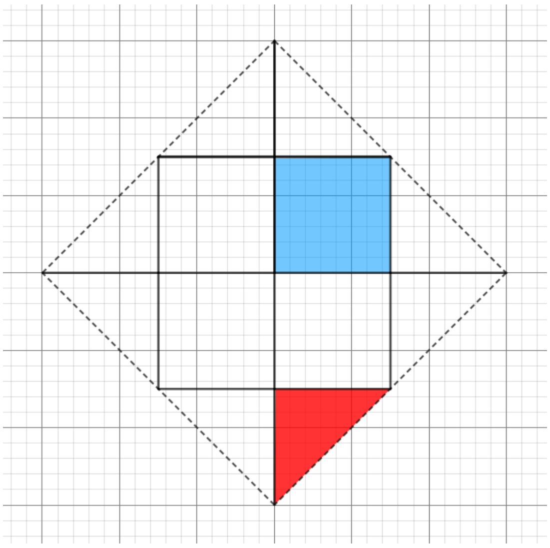
À rendre avec la copie.



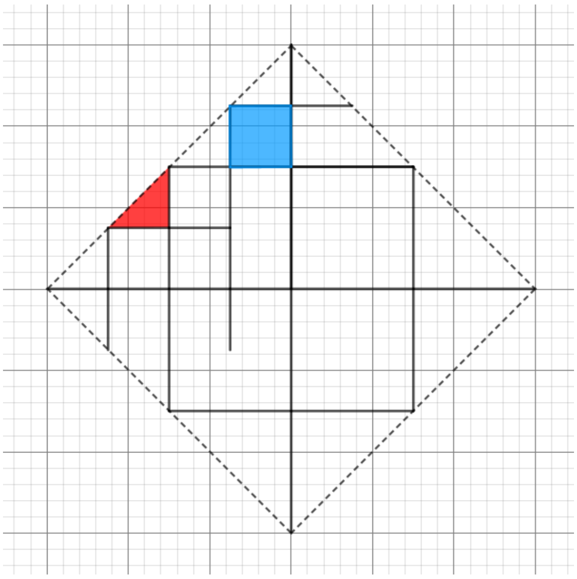
F_0



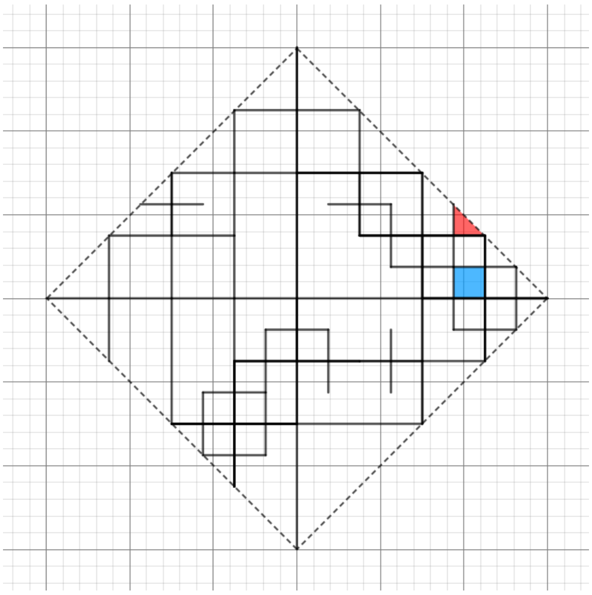
F_1



F_2



F_3



F_4