MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
Liberté Égalité Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques 2025

ACADÉMIE DE NICE
Liberté Égalité Fraternité

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune.

Les énoncés des deux parties sont donc séparés, distribués puis ramassés à des moments différents.

Une des deux parties de l'épreuve est constituée des exercices nationaux, l'autre des exercices académiques. À l'issue de la première partie, les énoncés et les copies sont ramassées et une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie à l'issue de laquelle les copies et les énoncés sont également ramassés.

Exercices académiques

Résolution individuelle

Candidats de la voie générale N'ayant PAS choisi l'enseignement de spécialité mathématiques, et TOUS ceux de la voie technologique (STI2D, STL, ST2S, STMG, STHR, STD2A, STAV, S2TMD, etc.)

Déroulement de l'épreuve constituée des exercices académiques (2 heures) :

Il n'est pas nécessaire de résoudre toutes les questions des deux exercices pour obtenir en fin de compte la note ou une appréciation maximales.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des recherches qu'ils ont pu entreprendre. **Il est également conseillé d'accorder une heure à un premier exercice, puis de passer à son deuxième quitte à revenir ensuite au premier.**

Les règles, compas, rapporteurs, équerre et calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

L'énoncé académique comporte 6 pages.

UNIVERSITÉ CÔTE D'AZUR · Inria · Animath · WOLFRAM · Texas Instruments · CASIO · NUMWORKS · Crédit Mutuel Enseignant

Exercice 1

Organiser un tournoi fermé !

Dans tout l'exercice, on considère un entier naturel non nul n **pair**.

Sacha doit organiser une compétition avec n participants qui sont numérotés de 1 à n.

Pour i et j des entiers naturels compris entre 1 et n et $i < j$, on définit et on note par le couple (i, j) un **match** entre le participant i et le participant j.

Par exemple, pour $n = 4$ participants, tous les matchs possibles sont $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(2, 3)$, $(2, 4)$ et $(3, 4)$.

On peut représenter ces six matchs sous la forme d'un tableau :

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$
$i = 1$	$\times$	$(1, 2)$	$(1, 3)$	$(1, 4)$
$i = 2$	$\times$	$\times$	$(2, 3)$	$(2, 4)$
$i = 3$	$\times$	$\times$	$\times$	$(3, 4)$

1. Dans cette question, on considère une compétition avec $n = 6$ participants.

   a) Compléter le tableau de l'**annexe** (**à rendre avec la copie**) afin de lister tous les matchs possibles. On barrera les cases inutiles de ce tableau.
   b) Combien a-t-on de matchs possibles pour $n = 6$ participants ?

2. Dans cette question, on revient au cas général avec n participants.

   En remarquant que l'on représente les matchs à l'aide d'un tableau, constitué de n colonnes et de $n - 1$ lignes, dont on barre la moitié des cases, montrer que l'on a $\dfrac{n(n-1)}{2}$ matchs possibles au total.

- On appelle **série** un ensemble de $\dfrac{n}{2}$ matchs tel que tous les participants de la compétition jouent et ne jouent qu'un seul match.
- On appelle **tournoi** la liste ordonnée des $n-1$ séries, que l'on numérote de 1 à $n-1$, telle que chaque participant n'affronte jamais deux fois un même adversaire.

Voici un exemple de tournoi pour $n = 4$ participants que l'on a représenté sous la forme d'un tableau :

Série 1	$(1, 2)$	$(3, 4)$
Série 2	$(1, 3)$	$(2, 4)$
Série 3	$(1, 4)$	$(2, 3)$

On remarque alors que :

- chaque participant n'affronte jamais deux fois le même adversaire ;
- l'ordre des matchs dans une même série n'a pas d'importance.

3. Combien peut-on organiser de tournois différents avec $n = 4$ participants ?
4. Compléter le tableau de l'**annexe** (**à rendre avec la copie**) pour obtenir un exemple de tournoi avec $n = 6$ participants.

5. Dans cette question, on considère un tournoi avec $n = 6$ participants.

   On notera par exemple $(1,5),(3,4),(2,6)$ une série.

   a) Combien a-t-on de séries possibles telles que les participants 1 et 2 se rencontrent ? Les citer.
   b) On suppose que la première série est la série $(1,2),(3,4),(5,6)$. Combien a-t-on alors de secondes séries possibles telles que les participants 1 et 3 s'affrontent ? On rappelle qu'un participant ne peut pas affronter deux fois le même adversaire.
   c) On suppose que la première série est $(1,2),(3,4),(5,6)$, que la seconde série est $(1,3),(2,6),(4,5)$ et qu'à la troisième série les participants 1 et 4 se rencontrent. Démontrer qu'il n'y a qu'une seule troisième série possible que l'on donnera.
   d) En déduire un exemple de tournoi où à la série n°i, le participant 1 rencontre le participant $i+1$, on complètera le tableau correspondant de l'**annexe** (**à rendre avec la copie**) .
   e) Combien a-t-on de tournois possibles où à la série n°i, le participant 1 rencontre le participant $i+1$?
   f) Combien peut-on organiser de tournois différents ?

6. On considère l'algorithme suivant afin de construire un tournoi avec n participants.
   Soit le match (i,j) avec $1 \leqslant i < j \leqslant n$:

   - Si $j < n$ et $i + j - 1 < n$ alors les participants i et j s'affronteront à la série $i + j - 1$.
   - Si $j < n$ et $i + j - 1 \geqslant n$ alors les participants i et j s'affronteront à la série $i + j - n$.
   - Si $j = n$ et $2i \leqslant n$ alors les participants i et j s'affronteront à la ronde $2i - 1$.
   - Si $j = n$ et $2i > n$ alors les participants i et j s'affronteront à la ronde $2i - n$.

   Compléter le tableau de l'**annexe** (**à rendre avec la copie**) correspondant au tournoi obtenu à l'aide de cet algorithme pour $n = 6$ participants.

Exercice 2

De ville en ville

Le problème du voyageur : soit n un nombre entier, supérieur ou égal à 3.
Un voyageur doit visiter une et une seule fois n villes et revenir à son point d'origine.
Le problème est de trouver l'ordre de visite des villes qui **minimise la distance totale parcourue** par le voyageur. Le trajet obtenu sera alors appelé **trajet optimal**.

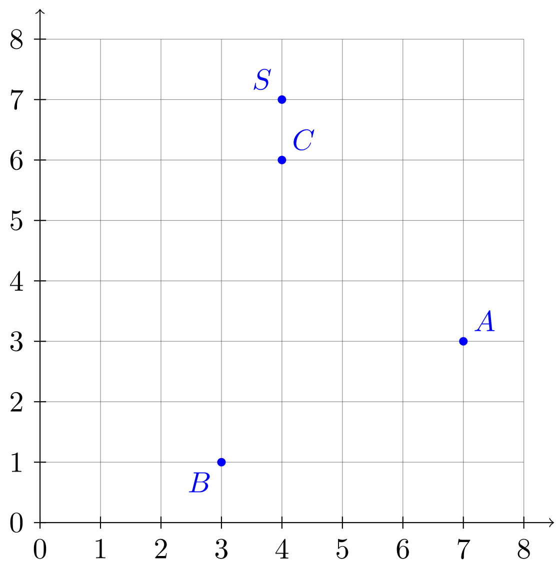
L'objectif de cet exercice est d'étudier deux stratégies pour résoudre ce problème.

Partie 1 : premier exemple avec 3 villes à visiter.

On suppose, dans cette partie, que $n = 3$.

Le voyageur de commerce doit, à partir de S (siège de son entreprise) visiter les 3 villes suivantes A, B et C dont on connaît les coordonnées, dans un repère orthonormé d'unité 1 km, puis revenir en S.

Voici les coordonnées des villes A, B et C et du siège S de son entreprise : $A(7;3)$, $B(3;1)$, $C(4,6)$ et $S(4,7)$.



On rappelle les deux résultats suivants :

- Dans un repère orthonormé, si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ alors $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.
- Pour tout entier naturel n non nul, on a $1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Un exemple de trajet est S puis A, puis B, puis C et enfin retour à S, que l'on notera $SABCS$.

On remarquera que les trajets $SABCS$ et $SCBAS$ ont la même longueur.

1. Citer tous les trajets de longueurs différentes.
2. On considère le trajet $SABCS$. Déterminer sa longueur et donner une valeur approchée au mètre près.

Partie 2 : cas de 4 villes et plus

3. Supposons maintenant qu'il y a 4 villes à visiter au lieu de 3.

   Combien y a-t-il alors, au maximum, de trajets de longueurs différentes ?

4. On admet le résultat suivant : s'il y a n villes à visiter ($n \geqslant 2$) alors il y a : $\dfrac{n \times (n-1) \times \cdots \times 2}{2}$ calculs de distance entre deux points à effectuer.

   Supposons qu'on ait un ordinateur assez rapide pour calculer la distance entre deux points en 10^{-8} secondes.

   Si le voyageur avait 15 villes à visiter, combien de temps (en heures-minutes) faudrait-il à cet ordinateur pour déterminer le trajet le plus court ? (On suppose que seul le temps correspondant au calcul de distance est significatif pour obtenir la réponse).

5. Que doit-on penser de cette stratégie consistant à calculer tous les trajets possibles ?

Partie 3 : étude d'une autre stratégie

Stratégie : le voyageur décide, à chaque étape, de choisir la ville qui lui est la plus proche.

L'objectif de cette partie est d'étudier cette nouvelle stratégie.

6. Revenons maintenant à notre problème initial (partie 1) avec l'entreprise S et les trois villes A, B et C.
   a) Calculer la distance entre S et chacune des trois autres villes, afin de déterminer le point le plus proche de S. On donnera une valeur approchée au mètre près.
   b) Poursuivre alors les différentes étapes de la stratégie afin de déterminer le trajet obtenu.
   c) Combien de calculs de distance entre deux points doit-on effectuer afin d'obtenir ce trajet à l'aide de cette stratégie ? On note ce nombre D_3.
   d) i. Donner alors la longueur de ce trajet au mètre près (ne pas oublier qu'on revient à S).
      ii. A-t-on obtenu le trajet optimal ?
7. On considère maintenant qu'il y a 4 villes à visiter. On note alors D_4 le nombre de calculs de distance nécessaires afin de déterminer le trajet obtenu par cette stratégie. Justifier que $D_4 = 9$.
8. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On suppose qu'il y a n villes à visiter.

   Montrer alors que $D_n = \dfrac{n(n+1)}{2} - 1$.
9. En reprenant l'ordinateur de la partie 2, s'il y avait 15 villes à visiter, calculer le temps mis par l'ordinateur pour déterminer le trajet donné par cette stratégie.
10. Au vu des résultats obtenus dans cette partie, donner un avantage et un inconvénient à l'utilisation de cette stratégie par le voyageur.

Annexes de l'exercice «Organiser un tournoi fermé !»

À rendre avec la copie

Question 1.(a)

	$j = 1$					
$i = 1$	$\times$					

Question 4

Série 1	$(1, 2)$	$(3, 4)$	
Série 2	$(1, 3)$	$(2, 5)$	
Série 3	$(1, 4)$		
Série 4	$(1, 5)$		
Série 5	$(1, 6)$		

Question 5.(d)

Série 1	$(1, 2)$	$(3, 4)$	
Série 2	$(1, 3)$	$(2, 6)$	
Série 3			
Série 4			
Série 5			

Question 6

Série 1			
Série 2			
Série 3			
Série 4			
Série 5			