Correction : Partage convivial

Partie 1 : un exemple particulier

1.

Nombre de convives	4	5	6
Nombre de parts de gâteau dans chaque portion	15	12	10

2. (a) À la troisième personne : $\frac{8}{60}$ et $\frac{7}{60}$ car $\frac{8}{60}+\frac{7}{60}=\frac{15}{60}$ et à la dernière personne $\frac{5}{60}$, $\frac{4}{60}$, $\frac{3}{60}$, $\frac{2}{60}$ et $\frac{1}{60}$ de somme $\frac{15}{60}$.

   (b) On s'arrange à créer des sommes de $\frac{12}{60}$:
   - à la première personne : $\frac{10}{60}$ et $\frac{2}{60}$;
   - à la deuxième personne : $\frac{9}{60}$ et $\frac{3}{60}$;
   - à la troisième personne : $\frac{8}{60}$ et $\frac{4}{60}$;
   - à la quatrième personne : $\frac{7}{60}$ et $\frac{5}{60}$;
   - à la cinquième personne : $\frac{6}{60}$, $\frac{5}{60}$ et $\frac{1}{60}$.

   (c) On s'arrange à créer des sommes de $\frac{10}{60}$:
   - à la première personne : $\frac{10}{60}$;
   - à la deuxième personne : $\frac{9}{60}$ et $\frac{1}{60}$;
   - à la troisième personne : $\frac{8}{60}$ et $\frac{2}{60}$;
   - à la quatrième personne : $\frac{7}{60}$ et $\frac{3}{60}$;
   - à la cinquième personne : $\frac{6}{60}$ et $\frac{4}{60}$;
   - à la sixième personne : $\frac{5}{60}$ et $\frac{5}{60}$;

   (d) D'après ce qui précède, on a trouvé un partage en parts qui permet de donner la même portion à chaque convive qu'ils soient 4, 5 ou 6 donc le partage en 11 parts est convivial.

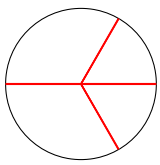
Partie 2 : cas $n=2$ et $n=3$

3. (a) u_2 est le nombre minimal de parts d'une découpe d'un gâteau telle que l'on puisse se partager équitablement le gâteau que l'on soit en 1, 2 ou 3 personnes.

   (b) Il y aura au maximum 3 convives, donc $u_2 \geqslant 3$.

   (c) i. La taille de chaque part est alors de $\frac{1}{3}$.

   ii. Si l'on coupe seulement en 3 parts, elles seront de même taille pour 3 convives, mais alors il sera impossible de donner autant à chaque personne quand il ne seront que 2. Donc $u_2 \geqslant 4$.

   (d)  On coupe en part de $\frac{2}{6}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{6}$.

   (e) $u_2 = 4$ d'après ce qui précède.

4. (a) On partage équitablement le gâteau que l'on soit en 2, 3 ou 4 personnes, donc 4 personnes au maximum donc $u_3 \geqslant 4$. Mais si le gâteau était coupé en quatre parts, pour 4 personnes, ces parts auraient des tailles identiques, et il ne serait pas possible de les répartir en 3 pour trois personnes. Donc $u_3 \geqslant 5$.

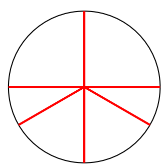
   (b) i. S'il y a 5 parts et 4 convives, un convive a au moins 2 parts (principe des tiroirs) et donc les autres ont chacun 1 part.

   ii. Les convives ont la même portion de gâteau, soit $\frac{1}{4}$.

   iii. Il y a trois parts de taille $\frac{1}{4}$ et 2 parts de taille inférieure (dont la somme fait $\frac{1}{4}$. On ne peut donc pas répartir ces dernières sur les trois autres parts.

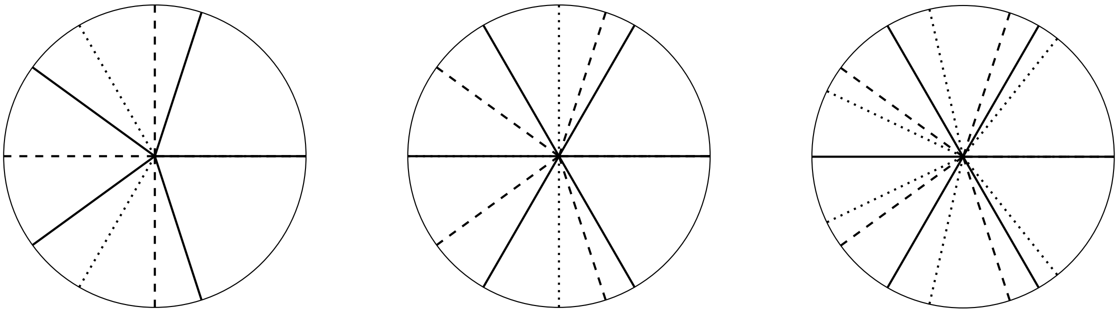
   iv. D'après de qui précède $u_3 \geqslant 6$.

   (c) On peut donner comme solution $\frac{3}{12}$ $\frac{3}{12}$ $\frac{2}{12}$ $\frac{2}{12}$ $\frac{1}{12}$ $\frac{1}{12}$.
   - en 2 : $\frac{3}{12}$, $\frac{2}{12}$ et $\frac{1}{12}$; $\frac{3}{12}$, $\frac{2}{12}$ et $\frac{1}{12}$.
   - en 3 : $\frac{3}{12}$ et $\frac{1}{12}$; $\frac{3}{12}$ et $\frac{1}{12}$; $\frac{2}{12}$ et $\frac{2}{12}$.
   - en 4 : $\frac{3}{12}$; $\frac{3}{12}$; $\frac{2}{12}$ et $\frac{1}{12}$; $\frac{2}{12}$ et $\frac{1}{12}$.



Partie 3 : vers une généralisation

5. Pour u_n, il y a au maximum $n+1$ convives, donc $u_n \geqslant n+1$.
6. Si l'un des convives n'a qu'une part, lorsque ceux-ci sont n, sa part mesure $\dfrac{1}{n}$. Elle est donc trop grosse pour un nombre de convives à $n+1$. Tous les convives ont donc au moins 2 parts quand ils sont n. Donc $u_n \geqslant 2n$.
7. Pour $n-1$ convives, on coupe le gâteau en $n-1$ parts égales, de même pour n et $n+1$, mais en partant à chaque fois du même rayon de découpe. Ce qui donne au maximum $n-1+n+n+1-2 = 3n-2$ parts.
   Voici des exemples pour $n = 4$, $n = 5$ et $n = 6$:



8. $2n \leqslant u_n \leqslant 3n-2$

Correction : Segments pixellisés

Partie 1 - Les motifs

1. (a) cf annexe
   (b) cf annexe
   (c) cf annexe

2. (a) Sur la largeur, le centre du pixel de départ et celui d'arrivée sont espacés de $a-1$ pixels.
   Sur la hauteur, le centre du pixel de départ et celui d'arrivée sont espacés de $b-1$ pixels.
   Comme on ne peut se déplacer en diagonal, il y a $a-1+b-1=a+b-2$ déplacements à réaliser.
   (b) Si l'on assimile les $n=a+b-2$ déplacements comme des cases comme dans la définition, il faut choisir $a-1$ (ou $b-1$...) cases pour décider des déplacements vers la droite. D'où le résultat.
3. Le nombre de motifs est $C(12+8-2,8-1)=C(18,7)=\dfrac{18\times 17\times 16\times ...12}{7\times 6\times 5\times ...\times 1}=31824$

Partie 2 - Les segments pixellisés

4. (a) Si l'on a R motifs, il faut $a\times R$ pixels de large pour remplir le segment donc $aR=x$ et R divise x.
   De même, sur la hauteur, on a $bR=y$ donc R divise y.
   Donc R est un diviseur commun de x et de y.
   (b) On a alors $a=\dfrac{x}{R}$ et $b=\dfrac{y}{R}$.
5. (a) les diviseurs communs de 4 et 8 sont : 1,2,4.
   Pour $R=1$, on a un motif de taille $a=4$ et $b=8$.
   Pour $R=2$, on a un motif de taille $a=2$ et $b=4$.
   Pour $R=4$, on a un motif de taille $a=1$ et $b=2$.
   (b) cf annexe

6. (a) les diviseurs communs de 12 et 24 sont : 1,2,3,,4,6,12.
   Pour $R=1$, on a un motif de taille $a=12$ et $b=24$.
   Pour $R=2$, on a un motif de taille $a=6$ et $b=12$.
   Pour $R=3$, on a un motif de taille $a=4$ et $b=8$.
   Pour $R=4$, on a un motif de taille $a=3$ et $b=6$.
   Pour $R=6$, on a un motif de taille $a=2$ et $b=4$.
   Pour $R=12$, on a un motif de taille $a=1$ et $b=2$.
   (b) cf annexe

Partie 3 - Les segments pixellisés réguliers

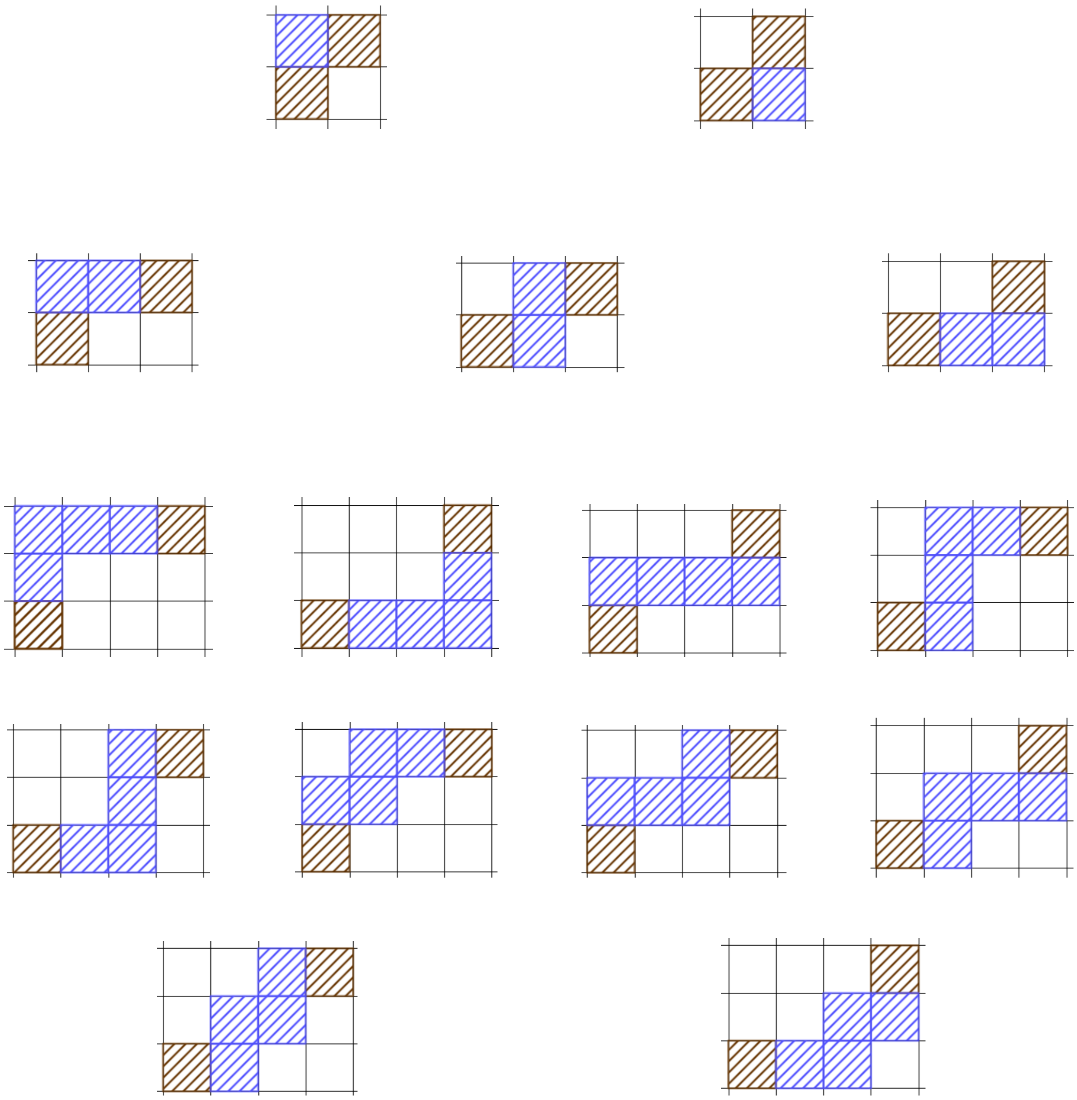
7. Pour $x=y$, on prend un motif de taille $(1,1)$ et $R=x$.
   Les deux conditions sont bien vérifiées car $b=1$ et R divise x et y d'après la partie précédente.

8. R doit être un diviseur commun de x et de y. Le plus grand est donc $pgcd(x,y)$.
   De plus dans ce cas, $b=\dfrac{y}{R}$ est le plus petit entier possible.

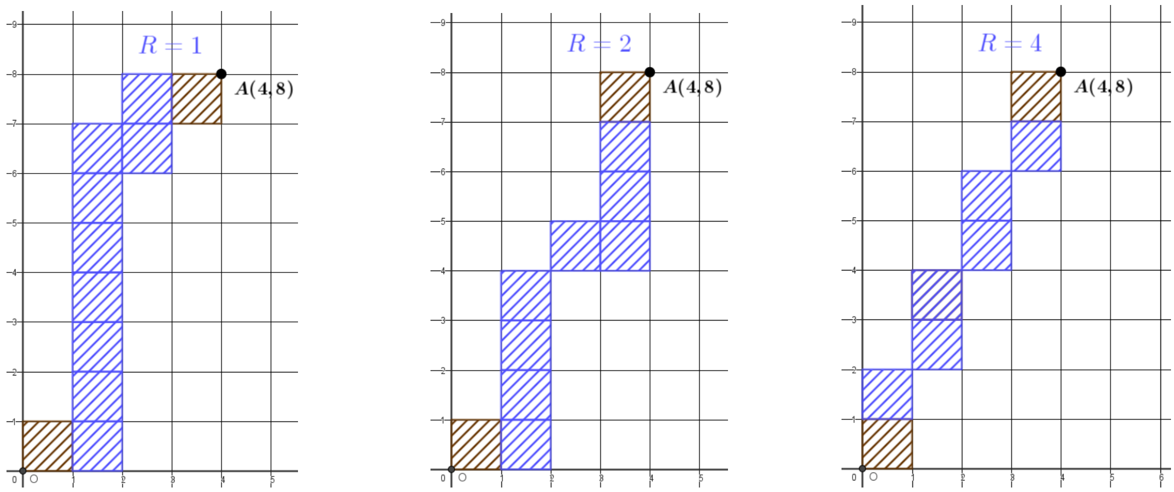
9. (a) $R=pgcd(8,12)=4$ et le motif a pour taille $a=\dfrac{8}{4}=2$, $b=\dfrac{12}{4}=3$.
   (b) cf annexe

10. On a nécessairement $x=aR=20$ et $4b=y$.
    Donc les couples possibles sont $(20,y)$ avec y un multiple non nul de 4.

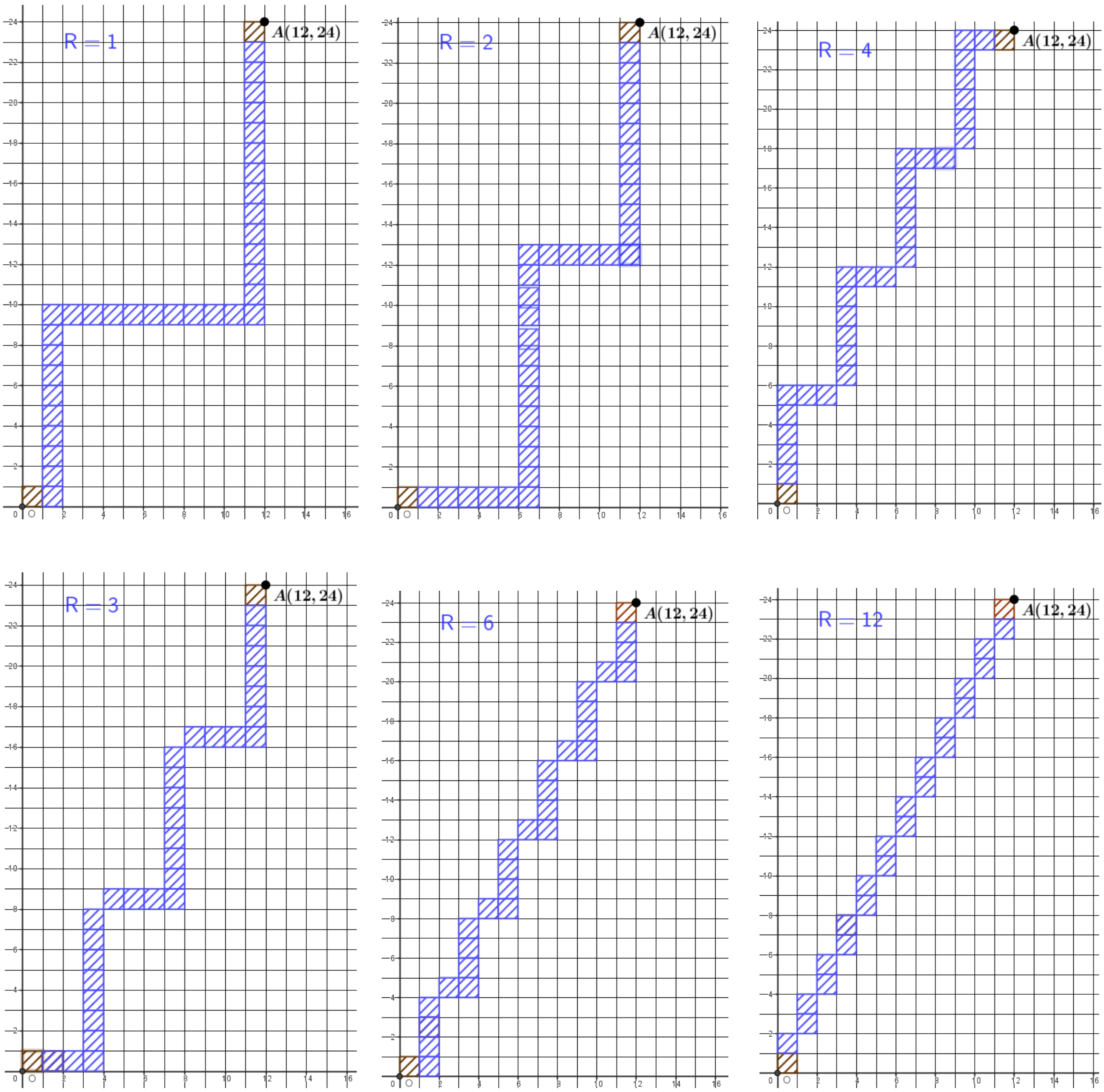
Annexe 1



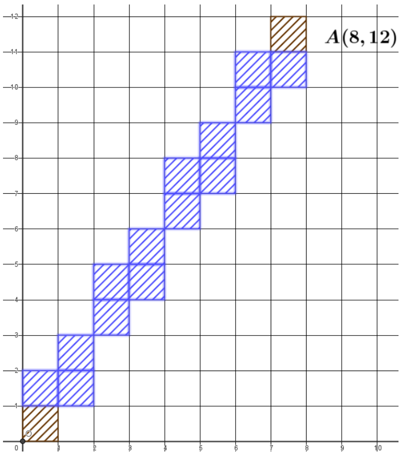
Annexe 2.1



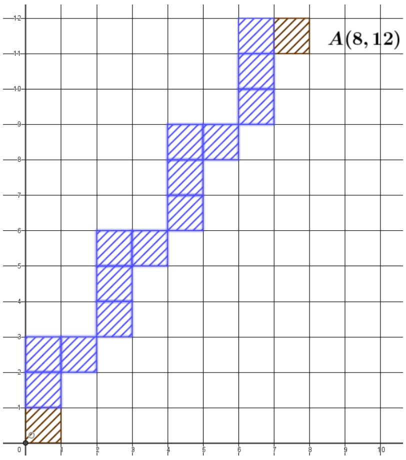
Annexe 2.2



Annexe 3



Exemple 1



Exemple 2