Correction : **Un programme musclé**

Partie 1 : Premiers exemples

1. (a) $(10;15;20) \to [10;15;20;25;30;35;45]$ donc irrégulier de pas minimum 5 et maximum 10.
   (b) $(1;2;3) \to [1;2;3;4;5;6]$ donc régulier de pas 1.
   (c) $(2;4;6) \to [2;4;6;8;10;12]$ donc régulier de pas 2.
   (d) $(3;5;7) \to [3;5;7;8;10;12;15]$ donc irrégulier de pas minimum 1 et maximum 3.
2. $(1;2;3;4) \to [1;2;3;4;5;6;7;8;9;10]$ donc régulier de pas 1.
3. (a) En n'utilisant qu'un disque de la liste de poids $(1;2;3;\dots;n)$, les charges croissantes correspondantes sont les entiers de 1 à n (de façon triviale).
   (b) Partant du disque de poids n, il suffit d'ajouter successivement pour 2ème poids les poids $1;2;3;\dots;(n-1)$ pour pouvoir obtenir toutes les charges entières de $(n+1)$ à $n+(n-1)=2n-1$
   (c) Partant des deux disques de poids n et $(n-1)$ utilisés précédemment, il suffit ensuite d'ajouter successivement pour 3ème poids les poids $1;2;\dots;(n-2)$ pour obtenir toutes les charges entières de $2n$ à $(2n-1)+(n-2)=3n-3$.
   (d) On généralise le procédé : aux plus grands poids utilisés dans l'étape précédentes n ; $(n-1)$; $(n-2)$ etc. on ajoute un nouveau poids $1;2;3;\dots$ dans l'ordre croissant on obtient alors des sommes entières consécutives, jusqu'à la dernière étape où de proche en proche on a la somme de tous les poids $1;2;3;\dots;n$ et donc jusqu'à obtenir S.

   Le programme de musculation est donc bien formé de l'ensemble des entiers compris entre 1 et S.
4. On passe de $(1;2;3;\dots;n)$ à $(2;4;6;\dots;2n)$ en multipliant tous les poids par deux, ce qui a pour effet de multiplier toutes les sommes obtenues (les charges) et les différences (les pas) par 2 : Le programme de musculation de $(1;2;3;\dots;n)$ étant régulier de pas 1, celui de $(2;4;6;\dots;2n)$ est donc aussi régulier de pas égaux à 2.
5. (a) $(1;3) \to [1;3;4]$: irrégulier de pas minimum 1 et maximum 2 b. Par ajout de 5 aux sommes du a. : $(1;3;5) \to [1;3;4;5;6;8;9]$

   Programme irrégulier de pas minimum 1 et maximum 2. c. Par ajout de 7 aux sommes du b. : $(1;3;5;7) \to [1;3;4;5;6;7;8;9;10;11;12;13;15;16]$

   Programme irrégulier de pas minimum 1 et maximum 2.
6. Partant des poids $(1;3;5;\dots)$ les charges minimales sont 1 puis 3 (puis 4 etc.) donc 2 ne figure pas dans les charges d'entraînement.

   T s'obtient par l'ajout de tous les poids impairs $1+3+5+\dots+n$, donc pour obtenir la somme $(T-2)$ il faudrait pouvoir retirer de la somme T un ou plusieurs entiers impairs dont la somme vaut 2 : ce qui est impossible d'après le point précédent donc $(T-2)$ ne figure pas non plus dans les charges d'entraînement.
7. $0 < a < b$ donc $(a;b) \to [a;b;a+b]$, régulier si et seulement si les pas sont égaux donc si et seulement si $b-a=(a+b)-b$ soit $b=2a$ d'où $(a;2a)$ (donnant $[a;2a;3a]$, programme régulier de pas égaux à a).
8. Par disjonction de cas :
   - ▷ Si $c=a+b$, on a $(a;b;a+b) \to [a;b;a+b;2a+b;a+2b;2a+2b]$

     On doit avoir $b-a=(a+b)-b$ donc $b=2a$ d'où $c=a+b=3a$.

     Et alors $(a;2a;3a) \to [a;2a;3a;4a;5a;6a]$, programme de musculation régulier de pas égaux à a.
   - ▷ Si c > a + b on a : $(a;b;c) \to [a;b;a+b;c;c+a;c+b;c+a+b]$

     Par différence, les pas sont égaux si et seulement si : pas$=b-a=(a+b)-b=c-(a+b)=(c+b)-(c+a)=(c+a+b)-(c+b)$ Ce qui donne pas$=b-a=a=c-(a+b)=b-a=a$. Et donc pas$=b-a=a=c-(a+b)$ Ce qui équivaut à $b=2a$ et à $c=(a+b)+a=4a$

     D'où l'ensemble $(a;b;c)=(a;2a;4a) \to [a;2a;3a;4a;5a;6a;7a]$, programme de musculation régulier de pas égaux à a.
   - ▷ Si $c < a+b$ soit $(a;b;c)$ on obtient par sommes l'entrainement croissant : $[a;b;c;a+b;a+c;b+c;a+b+c]$

     Par différences, le pas sera constant si et seulement si : pas$=b-a=c-b=(a+b)-c=(a+c)-(a+b)=(b+c)-(a+c)=(a+b+c)-(b+c)$ Donc pas$=b-a=c-b=(a+b)-c=c-b=b-a=a$ Donc pas$=b-a=c-b=(a+b)-c=a$.

     Ce qui implique $b=2a$ d'où pas$=a=c-2a=3a-c$. D'où $c=3a$ mais dans ce cas : $a=3a-c=0$ donc $a=0$: non

     Donc pas de programme de musculation régulier si $c < a+b$

   Conclusion : les listes de poids $(a;b;c)$ donnant des programmes de musculation réguliers sont les $(a;2a;3a)$ et $(a;2a;4a)$, a réel strictement positif.

Fractales (correction)

Partie 1 : Des constructions et des longueurs

1. a) cf annexe
   b) cf annexe

2. a) Les 3 longueurs sont : 12,6 et 3
   b)

taille	0	1	2
longueurs	12	6	3
nombre de segments	4	8	4

Partie 2 : Les différents segments

3. a) La fractale F_0 est simplement le segment de départ donc $S(0,0) = 1$.
   La fractale F_1 est obtenue après une étape de découpage donc elle comporte 4 segments : 2 grands donc $S(1,0) = 2$ de taille 0 et 2 petits donc $S(1,1) = 2$ de taille 1.
   b) cf annexe

4. On remarque qu'à chaque étape de découpage les plus grands segments de taille 0 sont coupés en deux moitiés ce qui donne des segments de taille 0 également. Donc leur nombre suit une suite géométrique de raison 2. Comme F_0 a un seul segment, on a $S(n,0) = 2^n$.
   De la même façon la médiatrice des plus petits segments de taille p donne 2 segments encore plus petits de taille $p+1$. Comme F_0 a un seul segment, on a $S(n,n) = 2^n$.

5. cf annexe

Partie 3 : Les différentes longueurs

6. a) La fractale F_0 comporte un segment de longueur 48 donc $L(0,0) = 48$.
   La fractale F_2 possède 2 tailles donc $L(1,0) = \dfrac{48}{2} = 24$ et $L(1,1) = \dfrac{48}{4} = 12$.
   b) cf annexe

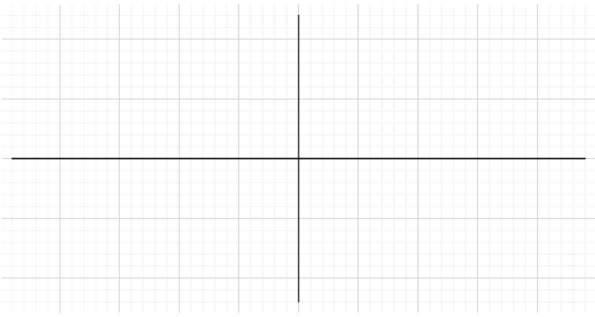
7. La fractale F_n a ses plus grands segments de taille 0 coupés en 2 moitiés. Ces nouveaux segments sont de taille 0. La longueur des segments de taille 0 suit donc une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et comme le segment F_0 a une longueur égale à 48, on a $L(n,0) = \dfrac{48}{2^n}$.
8. a) Les segments de taille 0 de F_n donne deux types de segments de F_{n+1} de taille 0 et 1. Les segments de taille 1 de F_n donne deux types de segments de F_{n+1} de taille 1 et 2, ...
   b) Pour une fractale F_n, l'étape de découpage d'un segment de taille p donne deux nouveaux segments dont la longueur est divisée par 4 et de taille $p+1$.
   c) cf annexe

Partie 4 : De l'infini dans du fini

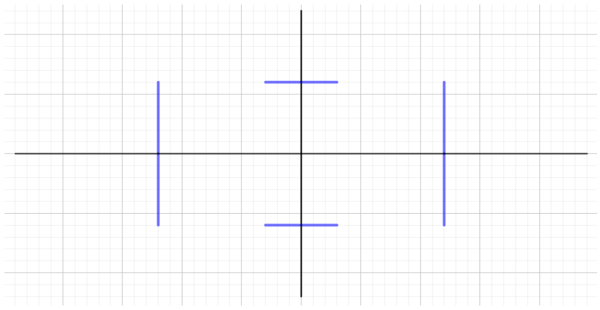
9. a) Un segment de longueur ℓ donne deux segments de longueur $\dfrac{\ell}{2}$ et deux segments de longueur $\dfrac{\ell}{4}$ ce qui représente une longueur égale à $2 \times \dfrac{\ell}{2} + 2 \times \dfrac{\ell}{4} = \dfrac{3}{2}\dfrac{\ell}{2}$.
   b) On obtient pour F_8 une longueur totale égale à $48 \times \left(\dfrac{3}{2}\right)^8 = 123$ cm
   c) $48 \times 1.5^{75}/(591 \times 10^6 \times 10^6) \approx 1,3$ donc à partir de $n = 75$.

Annexe 1

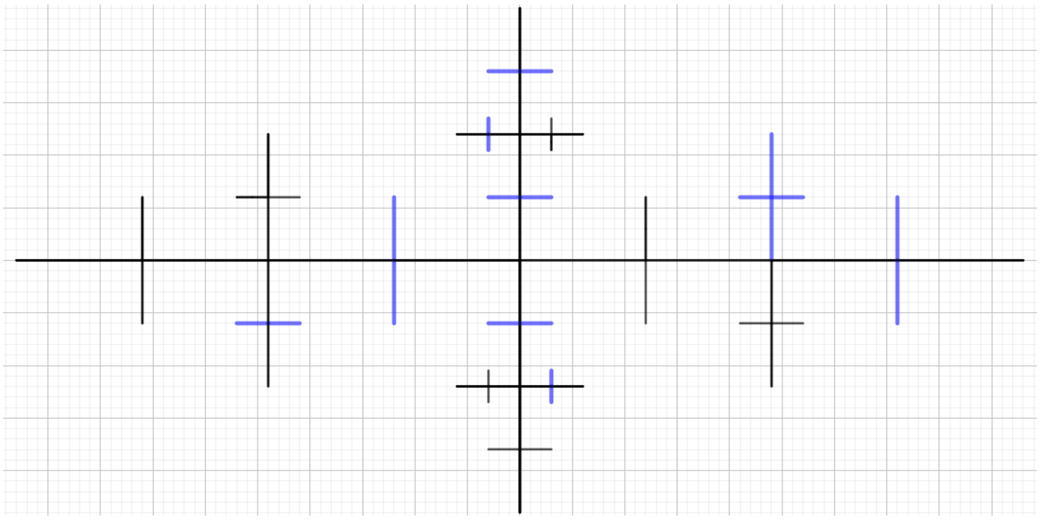
F_0



F_1



F_2



F_3

Annexe 2 : Le triangle des segments

n \ p	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	2	2				
2	**4**	**8**	**4**			
3	**8**	**24**	24	**8**		
4	**16**	64	**96**	**64**	**16**	
5	**32**	**160**	**320**	**320**	**160**	**32**

Annexe 3 : Le triangle des longueurs

n \ p	0	1	2	3	4	5
0	48					
1	24	12				
2	**12**	**6**	**3**			
3	**6**	**3**	1.5	**0, 75**		
4	**3**	1.5	**0.75**	**0.375**	**0, 1875**	
5	**1.5**	**0.75**	**0.375**	**0.1875**	**0.0934**	**0, 0469**