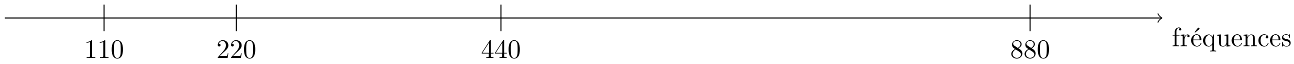
Correction : **Gamme musicale**

Partie 1 : Construction des octaves

1. Voici le tableau rempli :

Numéro de l'octave au-dessus ou au-dessous de f_0	1	2	3	4
Fréquence de l'octave au-dessus correspondante	880	1740	3480	6960
Fréquence de l'octave au-dessous correspondante	220	110	55	$27,5$

2. Voici l'axe gradué complété, en respectant l'échelle proposée :



3. On reconnait une suite géométrique de raison 2 et de premier terme f_0, d'où la formule.
   On a $f_1^- = \frac{1}{2}f_0$, et donc on a de même : $f_n^- = \frac{f_0}{2^n}$. On peut noter que cette fois-ci c'est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
4. On a $f_{n+1}^+ - f_n^+ = 2^{n+1}f_0 - 2^n f_0 = (2^n \times 2 - 2^n)f_0 = 2^n f_0$. Cet écart dépend de n, on peut de plus noter qu'il devient grand lorsque n est grand.

Partie 2 : Construction des quintes

1. On a $f_0 = \frac{2}{3}q_1$.
2. Voici le tableau rempli :

Numéro n de la quinte	1	2	3	4	5	6
Fréquence de la n-ième quinte	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{27}{8}$	$\frac{81}{16}$	$\frac{243}{32}$	$\frac{729}{64}$
Fréquence ramenée dans l'intervalle $[1,2]$	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{243}{128}$	$\frac{729}{512}$
Valeur approchée à 10^{-2}	1,5	1,13	1,69	1,27	1,90	1,42

3. Voici le tableau rempli :

Numéro n de la quinte ordonnée	2	4	6	1	3	5
Valeur approchée à 10^{-2}	1,13	1,27	1,42	1,5	1,69	1,90

4. A l'aide de la calculette :
$$(\frac{3}{2})^{12} \approx 129,75 \quad \text{et} \quad 2^7 = 128.$$
   L'égalité n'est donc pas vraie, même si les deux valeurs sont proches.
5. On aurait
$$(\frac{3}{2})^n = 2^p \iff \frac{3^n}{2^n} = 2^p \iff 3^n = 2^n \times 2^p \iff 3^n = 2^{n+p}$$
   Or 3^n est divisible par 3, mais 2^{n+p} n'est divisible que par 2 et ses puissances, c'est absurde.

Partie 3 : Couper un intervalle en deux

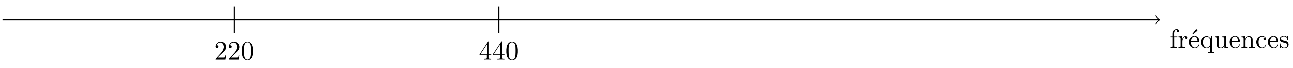
1. On a : $\frac{c}{a} = \frac{b}{c} \iff c^2 = ab$, et donc puisque $c \geq 0$ ou trouve $c = \sqrt{ab}$.
2. La formule ci-dessus donne pour le milieu géométrique :
$$c = \sqrt{f_0 \times 2f_0} = \sqrt{2} \times \sqrt{f_0^2} = \sqrt{2}f_0.$$
3. Le milieu de l'intervalle $[f_0, 2f_0]$ vaut $\frac{f_0+2f_0}{2} = \frac{3f_0}{2}$: il s'agit bien de la quinte au-dessus de f_0. On a trouvé que la moyenne géométrique vaut $\sqrt{2}f_0$. Avec la calculette, on trouve que $\sqrt{2} < \frac{3}{2}$, donc la moyenne géométrique est plus petite que le milieu.

Annexe

Annexe 1

Numéro de l'octave au-dessus ou au-dessous de f_0	1	2	3	4
Fréquence de l'octave au-dessus correspondante	880			
Fréquence de l'octave au-dessous correspondante	220			

Annexe 2



Annexe 3

Numéro n de la quinte	1	2	3	4	5	6
Fréquence de la n-ième quinte	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{27}{8}$			
Fréquence ramenée dans l'intervalle $[1, 2]$	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{27}{16}$			
Valeur approchée à 10^{-2}	1,5	1,13	1,69			

Annexe 4

Numéro n de la quinte ordonnée	2	4				
Valeur approchée à 10^{-2}	1,13					

Correction : **Fractales VTInd**

1. cf annexe

Etude des petits triangles isocèles

2. a) F_3 comporte 4×4=16 petits triangles.

   b) F_4 comporte 4×8=32 petits triangles.

3. a) À chaque étape de découpage un petit triangle isocèle est divisé en deux plus petits triangles isocèles ainsi qu'un petit carré. Donc $T_{n+1} = 2T_n$.

   b) Pour F_1 on a $4 = 2^{1+1}$ petits triangles. Pour F_2 on a $8 = 2^{2+1}$ petits triangles,...
   On reconnait une suite géométrique de raison 2, on a bien $T_n = 2^{n+1}$

   c) L'aire d'un petit triangle est $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{L}{2^n}\right)^2 = \dfrac{L^2}{2^{2n+1}}$.
   L'aire totale est donc $\dfrac{L^2}{2^{2n+1}} \times 2^{n+1} = \dfrac{L^2}{2^n}$.

   d) $n = 36$.

Etude des petits carrés

4. a) F_3 comporte $6 \times 4 = 24$ petits carrés.
   b) F_4 comporte $28 \times 4 = 112$ petits carrés.

5. On s'intéresse au nombre de petits carrés contenus dans la fractale F_n.

   a) Si a désigne le côté du contour, on a d'après Pythagore , $a^2 + a^2 = L^2$ et donc l'aire $a^2 = \dfrac{l^2}{2}$.

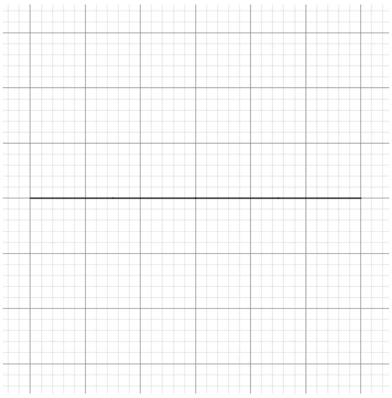
   b) $A_n = \dfrac{L^2}{2} - \dfrac{L^2}{2^n} = \dfrac{L^2}{2^n}(2^{n-1} - 1)$.

   c) L'aire est $\dfrac{L^2}{2^{2n}}$.

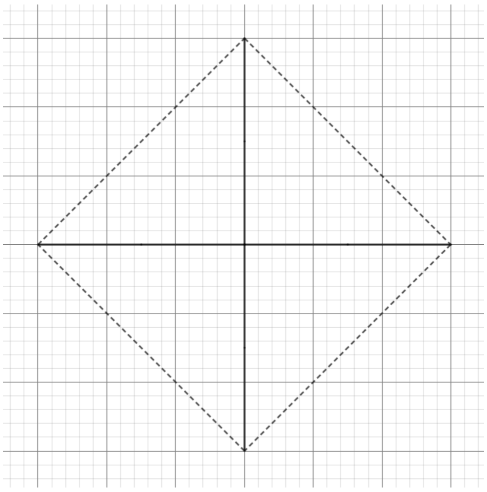
   d) Le nombre de petits carrés est $\dfrac{A_n}{\dfrac{L^2}{2^{2n}}} = 2^n(2^{n-1} - 1)$ ce qui donne $2^6(2^5 - 1) = 1984$ petits carrés pour F_6.

De l'infini dans du fini

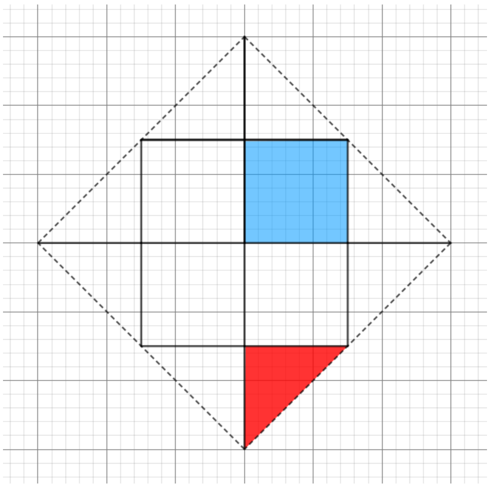
6. À chaque étape de découpage un segment de longueur ℓ donne 4 segments de longueur $\dfrac{\ell}{2}$ et donc une nouvelle longueur 2ℓ.
7. On calcule $6 \times 2^4 \times \dfrac{1}{150 \times 10^6 \times 10^5} \simeq 7$.



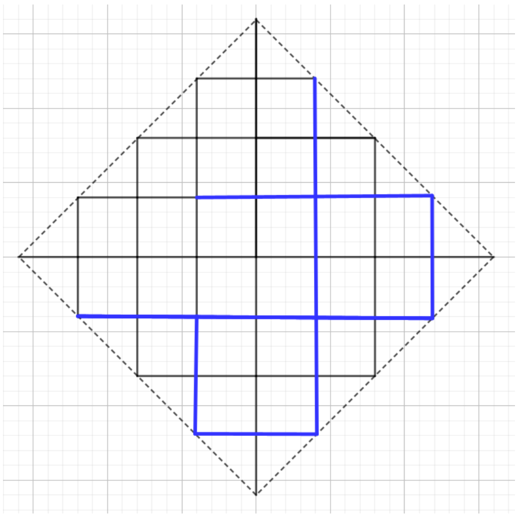
F_0



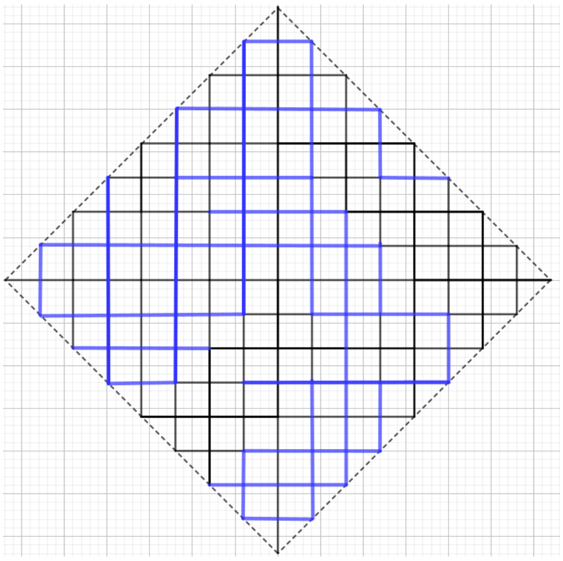
F_1



F_2



F_3



F_4