Organiser un tournoi fermé !

Soit n un entier naturel non nul qui est **pair**.

Sacha doit organiser une compétition avec n participants qui sont numérotés de 1 à n.

Pour i et j des entiers naturels compris entre 1 et n et $i < j$, on définira et on notera par le couple (i, j) un **match** entre le participant i et le participant j.

Par exemple pour $n = 4$ participants, tous les matchs possibles sont $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(2, 3)$, $(2, 4)$ et $(3, 4)$.

On peut représenter ces six matchs sous la forme d'un tableau :

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$
$i = 1$	$\times$	$(1, 2)$	$(1, 3)$	$(1, 4)$
$i = 2$	$\times$	$\times$	$(2, 3)$	$(2, 4)$
$i = 3$	$\times$	$\times$	$\times$	$(3, 4)$

1. Dans cette question on a $n = 6$ participants.

   (a) Compléter le tableau de l'annexe afin de lister tous les matchs possibles. On barrera les cases inutiles de ce tableau.

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$	$j = 6$
$i = 1$	$\times$	$(1, 2)$	$(1, 3)$	$(1, 4)$	$(1, 5)$	$(1, 6)$
$i = 2$	$\times$	$\times$	$(2, 3)$	$(2, 4)$	$(2, 5)$	$(2, 6)$
$i = 3$	$\times$	$\times$	$\times$	$(3, 4)$	$(3, 5)$	$(3, 6)$
$i = 4$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$(4, 5)$	$(4, 6)$
$i = 5$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$(5, 6)$

   (b) Combien a-t-on de matchs possibles pour $n = 6$ participants.
   On a donc 15 matchs possibles pour $n = 6$ participants.
   (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,4), (3,5), (3,6), (4,5), (4,6), (5,6)

2. Dans cette question on a n participants.
   En remarquant que l'on représente les matchs à l'aide d'un tableau, constitué de n colonnes et de $n - 1$ lignes, dont on barre la moitié des cases, montrer que l'on a $\frac{n(n-1)}{2}$ matchs possibles au total.
   On a $n \times (n - 1)$ cases dans un tableau de n colonnes et de $n - 1$ lignes. Comme on barre la moitié des cases d'un tel tableau, il reste $\frac{n(n-1)}{2}$ cases non barrées qui correspondent aux matchs possibles. On a donc $\frac{n(n-1)}{2}$ matchs possibles.

- On appelle **série** un ensemble de $\frac{n}{2}$ matchs tel que tous les participants de la compétition jouent et ne jouent qu'un seul match.
- On appelle **tournoi** la liste ordonnée des $n - 1$ séries, que l'on numérote de 1 à $n - 1$, telle que chaque participant n'affronte jamais deux fois un même adversaire.

Voici un exemple de tournoi pour $n = 4$ participants que l'on a représenté sous la forme d'un tableau :

Série 1	$(1,2)$	$(3,4)$
Série 2	$(1,3)$	$(2,4)$
Série 3	$(1,4)$	$(2,3)$

On remarque alors que :

- chaque participant n'affronte jamais deux fois le même adversaire ;
- l'ordre des matchs dans une même série n'a pas d'importance.

3. Combien peut-on organiser de tournois avec $n = 4$ participants ?
   Une série est déterminée par le choix de l'adversaire du participant 1.
   On a donc 3 séries possibles. On a 3 choix pour la première série, 2 pour la seconde, et 1 pour la dernière.
   On a donc $3 \times 2 = 6$ tournois possibles.
4. Compléter le tableau de l'annexe pour obtenir un exemple de tournoi avec $n = 6$ participants.

Série 1	$(1,2)$	$(3,4)$	$(5,6)$
Série 2	$(1,3)$	$(2,5)$	$(4,6)$
Série 3	$(1,4)$	$(2,6)$	$(3,5)$
Série 4	$(1,5)$	$(2,4)$	$(3,6)$
Série 5	$(1,6)$	$(2,3)$	$(4,5)$

5. Dans cette question on considère un tournoi pour $n = 6$ participants et on notera par exemple $(1,5),(3,4),(2,6)$ une série.
   (a) Combien a-t-on de séries possibles telles que les participants 1 et 2 se rencontrent ? Les citer. On peut en construire trois, cela dépend de l'adversaire du participant 3 qui a trois possibilités parmi les participants 4, 5 et 6 :
      - $(1,2),(3,4),(5,6)$
      - $(1,2),(3,5),(4,6)$
      - $(1,2),(3,6),(4,5)$

   (b) On suppose que la première série est la série $(1,2),(3,4),(5,6)$. Combien a-t-on alors de secondes séries possibles telles que les participants 1 et 3 s'affrontent ? On rappelle qu'un participant ne peut pas affronter deux fois le même adversaire.
   On considère l'adversaire du participant 2 à la seconde série :
      - Si c'est le participant 4, alors les participants 5 et 6 doivent s'affronter, ce qui n'est pas possible car ils se sont déjà affrontés ;
      - Si c'est le participant 5, on obtient comme seconde série $(1,3),(2,5),(4,6)$;
      - Si c'est le participant 6, on obtient comme seconde série $(1,3),(2,6),(4,5)$.

   Ainsi on a deux secondes séries possibles.

   (c) On suppose que la première série est $(1,2),(3,4),(5,6)$, que la seconde série est $(1,3),(2,6),(4,5)$ et qu'à la troisième série les participants 1 et 4 se rencontrent. Démontrer qu'il n'y a qu'une seule telle troisième série possible que l'on donnera.
   On considère l'adversaire du participant 2 à la seconde série :
      - Si c'est le participant 3, alors les participants 5 et 6 doivent s'affronter, ce qui n'est pas possible car ils se sont déjà affrontés ;

- Si c'est le participant 5, on obtient comme troisième série $(1,4),(2,5),(3,6)$;
- Cela ne peut pas être le participant 6 car les participants 2 et 6 se sont déjà rencontrés.

Ainsi on a une seule troisième série possible : $(1,4),(2,5),(3,6)$.

(d) En déduire un exemple de tournoi où à la série n°i, le participant 1 rencontre le participant $i+1$, on complètera le tableau correspondant de l'annexe.

Série 1	$(1,2)$	$(3,4)$	$(5,6)$
Série 2	$(1,3)$	$(2,6)$	$(4,5)$
Série 3	$(1,4)$	$(2,5)$	$(3,6)$
Série 4	$(1,5)$	$(2,3)$	$(4,6)$
Série 5	$(1,6)$	$(2,4)$	$(3,5)$

(e) Combien a-t-on de tournois possibles où à la série n°i, le participant 1 rencontre le participant $i+1$?
On remarque qu'en fixant la condition qu'à la série n°i, le participant 1 rencontre le participant $i+1$, on a trois choix pour la première série, puis deux choix pour la seconde série, les autres séries étant définies de manière unique.
Ainsi on a $3 \times 2 = 6$ tels tournois possibles.

(f) Combien peut-on organiser de tournois différents ?
On obtient un tournoi par permutation des séries d'un des tournois de la question précédente. C'est-à dire que pour un tournoi donné de la question précédente, on peut obtenir $5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ tournois. En effet, on a :

- Cinq choix pour le numéro de la série contenant le match $(1,2)$;
- Quatre choix pour le numéro de la série contenant le match $(1,3)$;
- Trois choix pour le numéro de la série contenant le match $(1,4)$;
- Deux choix pour le numéro de la série contenant le match $(1,5)$;
- Un choix pour le numéro de la série contenant le match $(1,5)$.

Comme on a 6 tournois de la forme de la question précédente, on en déduit que l'on peut organiser $6 \times 120 = 720$ tournois possibles.

6. On considère l'algorithme suivant afin de construire un tournoi avec n participants.
Soit le match (i,j) avec $1 \leqslant i < j \leqslant n$:
   - Si $j < n$ et $i+j-1 < n$ alors les participants i et j s'affronteront à la série $i+j-1$.
   - Si $j < n$ et $i+j-1 \geqslant n$ alors les participants i et j s'affronteront à la série $i+j-n$.
   - Si $j = n$ et $2i \leqslant n$ alors les participants i et j s'affronteront à la ronde $2i-1$.
   - Si $j = n$ et $2i > n$ alors les participants i et j s'affronteront à la ronde $2i-n$.

   Compléter le tableau de l'annexe correspondant au tournoi obtenu à l'aide de cet algorithme pour $n=6$ participants.

Série 1	$(1,6)$	$(2,5)$	$(3,4)$
Série 2	$(1,2)$	$(3,5)$	$(4,6)$
Série 3	$(1,3)$	$(2,6)$	$(4,5)$
Série 4	$(1,4)$	$(2,3)$	$(5,6)$
Série 5	$(1,5)$	$(2,4)$	$(3,6)$

Annexe

Question 1.(a)

	$j=1$					
$i=1$	$\times$					

Question 4

Série 1	$(1,2)$	$(3,4)$	
Série 2	$(1,3)$	$(2,5)$	
Série 3	$(1,4)$		
Série 4	$(1,5)$		
Série 5	$(1,6)$		

Question 5.(d)

Série 1	$(1,2)$	$(3,4)$	
Série 2	$(1,3)$	$(2,6)$	
Série 3			
Série 4			
Série 5			

Question 6

Série 1			
Série 2			
Série 3			
Série 4			
Série 5			

Correction de l'exercice sur le voyageur de commerce

Partie 1 :

1. Les trajets de longueurs différentes sont : S-A-B-C-S, S-A-C-B-S et S-B-A-C-S.
2. La longueur est : $6+\sqrt{20}+\sqrt{26}\approx 15{,}571\,km$.

Partie 2 :

3. Le nombre de trajets de longueurs différentes est, au maximum : 12.
4. Pour 15 villes, il y aurait $\dfrac{16\times 15\times .....\times 3\times 2}{2}$ calculs de distance à effectuer, le temps calcul serait alors d'environ 104 614 s soit environ 29 h et 4 minutes.

Partie 3 :

5. a. SA=5 km, SB= $\sqrt{37}\approx 6{,}083$ km et SC=1 km, le voyageur ira donc de S à C.
   b. CA= $\sqrt{18}\approx 4{,}243$ km et CB= $\sqrt{26}\approx 5{,}099$ km, le voyageur ira de C à A. Le trajet sera alors S-C-A-B-S.
   c. Il a fallu calculer 5 distances, ainsi $D_3=5$.
   d. La longueur de S-C-A-B-S est : $1+\sqrt{18}+\sqrt{20}+\sqrt{37}\approx 15{,}798$ km.
6. $D_4=4+3+2=9$.
7. $D_n=n+(n-1)+(n-2)+.......+2=n+(n-1)+(n-2)+......+2+1-1=\dfrac{n(n+1)}{2}-1$
8. Il y aura alors 119 calculs de distance à effectuer, pour un temps calcul de $1{,}19\times 10^{-6}$ s
9. Lorsque le voyageur choisit cette stratégie, le temps calcul est beaucoup plus faible mais le trajet obtenu n'est pas forcément le trajet le plus court.