

# Corrigé Olympiades nationales de mathématiques 2026

## Voie Générale

Métropole – La Réunion – Mayotte / Europe – Afrique – Orient

### Exercice 1 – Plus fort !

#### 1. Les feux de l'amour

Si Alice n'aime pas Jordan, alors Brenda n'aime pas Dan.

Si Brenda aime Jordan, alors Alice n'aime pas Jordan ; on en déduit donc : si Brenda aime Jordan, alors Brenda n'aime pas Dan.

Si Brenda n'aime pas Jordan, alors Brenda n'aime pas Dan.

**Dans tous les cas, Brenda n'aime pas Dan.**

#### 2. Retour vers le futur

On compare l'âge  $ab$  et l'âge  $ba$ , où  $a$  est le chiffre des dizaines et  $b$  le chiffre des unités.

$$ab - ba = (10a + b) - (10b + a) = 9(a - b).$$

a) Le gain est donc toujours un multiple de 9. Pour gagner un maximum d'années, il faut prendre  $a$  aussi grand que possible et  $b$  aussi petit que possible, avec  $a > b$ .

$$\text{Gain maximal} = 9(9 - 0) = 81.$$

**Le gain maximal est donc de 81 ans, obtenu en passant de 90 ans à 9 ans.**

b) **Gagner exactement 30 ans est impossible, car 30 n'est pas un multiple de 9.**

#### 3. Intelligence administrative

On compare les quatre parts de voix :

$$\frac{3}{20} = \frac{9}{60}, \quad \frac{1}{4} = \frac{15}{60}, \quad \frac{4}{15} = \frac{16}{60}, \quad \frac{1}{3} = \frac{20}{60}.$$

$$\text{On a donc : } \frac{3}{20} < \frac{1}{4} < \frac{4}{15} < \frac{1}{3}.$$

**Julie l'emporte, car elle obtient 1/3 des voix.**

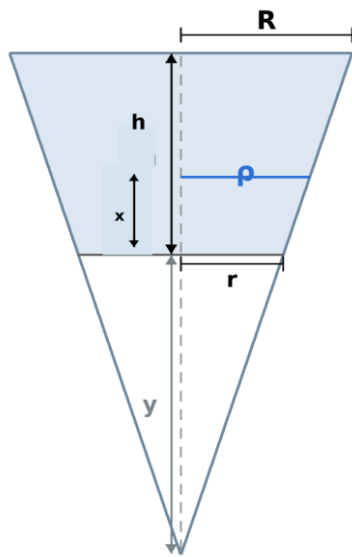
**Par ailleurs, le nombre total de votants doit être un multiple commun des dénominateurs 4, 15, 20 et 3, donc un multiple de 60.**

#### 4. Une moitié de seau pas si bête

On note  $r$  le petit rayon,  $R$  le grand rayon et  $h$  la hauteur totale du tronc de cône.

a) On prolonge le seau en un cône complet. Si  $y$  désigne la hauteur du petit cône ajouté, on obtient par le théorème de Thalès :

$$\frac{y}{(y + h)} = \frac{r}{R}, \quad \text{d'où } y = \frac{rh}{R - r}.$$



Le volume du seau est la différence entre le volume du grand cône et celui du petit cône :

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2(y + h) - \frac{1}{3}\pi r^2 y.$$

En remplaçant y par  $rh/(R-r)$  puis en simplifiant, on obtient

$$V = \frac{\pi h}{3}(r^2 + Rr + R^2).$$

b) On a, toujours avec le théorème de Thalès,  $\frac{y}{y+x} = \frac{r}{\rho}$  dont on déduit que :

$$\rho = r + \frac{x(R-r)}{h}.$$

Cette formule vérifie bien les cas limites : pour  $x = 0$ , on retrouve  $\rho = r$ , et pour  $x = h$ , on retrouve  $\rho = R$ .

c) Ici  $r = 1$ ,  $R = 1,2$  et  $h = 2$ .

$$\rho(x) = 1 + 0,1x.$$

Le volume rempli à la hauteur x vaut alors

$$V(x) = \frac{\pi x}{3}(1 + \rho(x) + \rho(x)^2).$$

Le volume total vaut environ 7,624 ; la moitié vaut donc environ 3,812.

À la calculatrice, l'équation  $V(x) = 3,812$  donne

$$x \approx 1,09.$$

On pouvait chercher autour de  $x = 1$  puis au-dessus de cette valeur, car le seau est plus large en haut qu'en bas : la moitié du volume est donc atteinte pour une hauteur légèrement supérieure à la moitié de la hauteur totale.

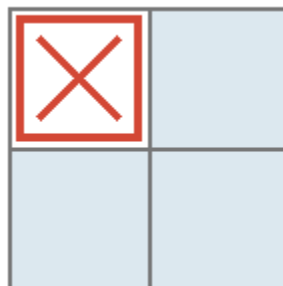
## 5. Triominos

a) Une grille  $2^n \times 2^n$  possède  $2^{2n} = 4^n$  cases.

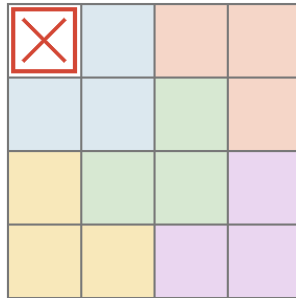
Or chaque triomino couvre 3 cases. Il faudrait donc que 3 divise  $4^n$ , ce qui est impossible.

**On ne peut donc pas paver une grille  $2^n \times 2^n$  par des triominos.**

b) Pour  $n = 1$ , la grille  $2 \times 2$  privée d'une case se pave évidemment avec un seul triomino.

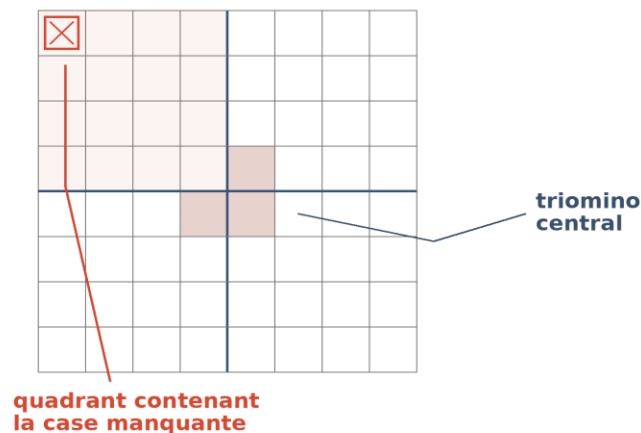


Pour  $n = 2$ , on peut construire explicitement un pavage de la grille  $4 \times 4$  privée du carré en haut à gauche.



Pour le cas général, on découpe la grille  $2^n \times 2^n$  en quatre quadrants de taille  $2^{(n-1)} \times 2^{(n-1)}$ .

Le quadrant qui contient la case manquante est déjà du bon type. Dans les trois autres quadrants, on place un triomino au centre, de façon à retirer une case de chacun d'eux.



On retrouve alors le même problème sur quatre grilles plus petites. On répète exactement ce procédé dans chaque quadrant.

Au bout d'un nombre fini d'étapes, on se ramène à des grilles  $2 \times 2$  privées d'une case, qui se pavent chacune avec un triomino. On obtient ainsi un pavage de la grille initiale, sans recourir à une démonstration par récurrence.

c) Le même raisonnement fonctionne si l'on enlève n'importe quelle case de la grille initiale : on repère le quadrant qui contient cette case, puis on place le triomino central de manière à créer une case manquante dans chacun des trois autres quadrants.

**Le résultat précédent reste donc vrai quelle que soit la case supprimée.**

## 6. Sommes harmoniques

a) On calcule directement :

$$H_4 = H_3 + \frac{1}{4} = \frac{11}{6} + \frac{1}{4} = \frac{22}{12} + \frac{3}{12} = \frac{25}{12}.$$

b) Un code Python possible est le suivant.

```
def harmonique(n):
    s = 0
    for k in range(1, n + 1):
        s = s + 1 / k
    return s
```

c) Le terme binaire de  $H_n$  est l'inverse de la plus grande puissance de 2 présente parmi les termes  $1, 1/2, \dots, 1/n$ .

- pour  $H_3$ , la plus grande puissance de 2 inférieure ou égale à 3 est 2, donc le terme binaire est  $1/2$  ;
- pour  $H_5$ , c'est 4, donc le terme binaire est  $1/4$  ;
- pour  $H_{20}$ , c'est 16, donc le terme binaire est  $1/16$ .

d) Soit  $2^k$  la plus grande puissance de 2 inférieure ou égale à  $n$ , avec  $n \geq 2$ .

On note  $L = \text{ppcm}(1, 2, \dots, n)$ . Dans la décomposition en facteurs premiers de  $L$ , la plus grande puissance de 2 présente est exactement  $2^k$ .

Ainsi, le quotient  $L/2^k$  est impair. En revanche, pour tout  $i$  différent de  $2^k$ , le quotient  $L/i$  est pair : en effet,  $i$  contient strictement moins de facteurs 2 que  $2^k$ .

Dans la somme

$$LH_n = L + \frac{L}{2} + \dots + \frac{L}{n},$$

tous les termes sont pairs sauf  $L/2^k$ , qui est impair. La somme entière est donc impaire.

Si  $H_n$  était un entier, alors  $LH_n$  serait multiple de  $L$ , donc en particulier pair. C'est impossible.

**Ainsi,  $H_n$  n'est jamais entier pour  $n \geq 2$ .**

## Exercice 2 – Super premiers

### Étude de la suite $(\pi_n)_{\{n \geq 0\}}$

1. On compte les nombres premiers inférieurs ou égaux à  $n$ .

$$\pi_0 = 0, \pi_1 = 0, \pi_2 = 1, \pi_5 = 3, \pi_6 = 3, \pi_{29} = 10, \pi_{46} = 14, \pi_{47} = 15.$$

2. Pour tout  $n$ , l'intervalle  $[0, n]$  est inclus dans  $[0, n + 1]$ .

Donc tout nombre premier compté dans  $\pi_n$  est aussi compté dans  $\pi_{n+1}$ , d'où

$$\pi_n \leq \pi_{n+1}.$$

**La suite  $(\pi_n)$  est croissante.**

3. Si  $p$  et  $q$  sont deux nombres premiers tels que  $p < q$ , alors  $q$  est compté dans  $\pi_q$  mais pas dans  $\pi_p$ .

On a donc

$$\pi_p < \pi_q.$$

4. Parmi les entiers de 0 à  $n$ , il n'y a pas plus de  $n$  nombres premiers, donc  $\pi_n \leq n$ .

L'égalité n'a lieu que pour  $n = 0$ . En effet, dès que  $n \geq 1$ , l'entier 0 appartient à  $[0, n]$  mais n'est pas premier.

$$\pi_n = n \Leftrightarrow n = 0.$$

### Suite des itérés de $m$ par $\pi$

5. Les suites demandées sont :

$$m = 5: (5; 3; 2; 1; 0; 0; 0; \dots)$$

$$m = 11: (11; 5; 3; 2; 1; 0; 0; \dots)$$

6. Pour tout entier  $m$ , on a  $\pi(m) \leq m$ . De plus, si  $m \geq 2$ , alors  $\pi(m) < m$ .

Ainsi, tant que la suite n'a pas atteint 0 ou 1, elle décroît strictement. Or  $\pi(1) = 0$  et  $\pi(0) = 0$ .

**La suite des itérés est donc toujours décroissante, puis nulle à partir d'un certain rang.**

### Entiers super premiers

7. On teste les nombres proposés :

- 2 engendre  $(2; 1; 0; \dots)$  : 2 est super premier ;
- 3 engendre  $(3; 2; 1; 0; \dots)$  : 3 est super premier ;
- 5 engendre  $(5; 3; 2; 1; 0; \dots)$  : 5 est super premier ;
- 7 engendre  $(7; 4; 2; 1; 0; \dots)$  : 7 n'est pas super premier, car 4 n'est pas premier ;
- 11 engendre  $(11; 5; 3; 2; 1; 0; \dots)$  : 11 est super premier.

**Les nombres super premiers parmi ceux proposés sont donc 2, 3, 5 et 11.**

8. Supposons construits les  $n$  plus petits super premiers  $s_1 < \dots < s_n$ .

Soit  $q$  le super premier suivant  $s_n$ .

Comme  $q$  est super premier,  $\pi(q)$  est aussi un super premier.

De plus,  $\pi(q) < q$ , donc  $\pi(q)$  est un super premier strictement inférieur à  $q$ .

Or les seuls super premiers strictement inférieurs à  $q$  sont

$$s_1, \dots, s_n.$$

Donc  $\pi(q)$  est l'un d'eux.

Si  $\pi(q) = s_1$ , ou  $\pi(q) = s_2, \dots$ , ou  $\pi(q) = s_{n-1}$ , alors on retrouve un super premier déjà obtenu avant  $s_n$ .

Comme  $q$  est justement le super premier qui vient après  $s_n$ , ce n'est pas possible.

On a donc nécessairement

$$\pi(q) = s_n.$$

**Ainsi, le super premier suivant est donc le nombre premier  $p$  tel que  $\pi(p) = s_n$ .**

9. Le quatrième plus petit super premier est 11.

D'après la question 8, le suivant est le nombre premier  $p$  tel que  $\pi(p) = 11$ .

Or le onzième nombre premier de la liste donnée dans l'énoncé est 31. Donc le cinquième plus petit super premier est 31.

**Le cinquième plus petit super premier est donc 31.**

## Comportement asymptotique

10. Considérons les nombres premiers  $q$  tels que  $\sqrt{N} < q \leq N$ .

S'il y en a  $\pi(N) - \pi(\sqrt{N})$ , leur produit est inférieur ou égal à

$$(\sqrt{N})^{\pi(N) - \pi(\sqrt{N})}.$$

Si de plus  $N \geq 4^{(2(M+1))}$ , alors  $\sqrt{N} \geq 4^{(M+1)}$ , et donc ce produit est inférieur ou égal à

$$4^{(M+1)(\pi(N) - \pi(\sqrt{N}))}.$$

Mais ce produit est inférieur ou égal à  $Q_N$ , et l'énoncé admet que  $Q_N \leq 4^N$ .

On obtient donc bien

$$4^{(M+1)(\pi(N) - \pi(\sqrt{N}))} \leq 4^N.$$

11. Les exposants vérifient alors la même inégalité :

$$(M + 1) (\pi(N) - \pi(\sqrt{N})) \leq N.$$

D'où

$$\pi(N) \leq \frac{N}{M + 1} + \pi(\sqrt{N}).$$

Enfin, comme il y a au plus  $\sqrt{N}$  entiers entre 1 et  $\sqrt{N}$ , on a  $\pi(\sqrt{N}) \leq \sqrt{N}$ , donc

$$\pi(N) \leq \frac{N}{M + 1} + \sqrt{N}.$$

12. En divisant par  $N$ , on obtient

$$\frac{\pi(N)}{N} \leq \frac{1}{M + 1} + \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

Pour  $N$  suffisamment grand, le terme  $\frac{1}{\sqrt{N}}$  devient aussi petit qu'on veut, donc que

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \leq \frac{1}{M} - \frac{1}{M+1}$$

Ainsi pour  $N$  assez grand on a :

$$\frac{\pi(N)}{N} \leq \frac{1}{M}.$$

Ou encore :

$$\frac{N}{\pi(N)} \geq M.$$

13. On applique ce résultat à  $N = s_{n+1}$ . Par définition des super premiers, on a

$$\pi(s_{n+1}) = s_n.$$

Ainsi, pour  $n$  assez grand,

$$\frac{s_{n+1}}{s_n} = \frac{s_{n+1}}{\pi(s_{n+1})} \geq M.$$

Comme cela vaut pour tout entier  $M$ , on conclut que

$$\frac{s_{n+1}}{s_n} \rightarrow +\infty.$$

**La suite des super premiers croît donc très vite.**