Corrigé Olympiades nationales de mathématiques 2026
Voie technologique

Métropole – La Réunion – Mayotte / Europe – Afrique – Orient

Exercice 1 – Plus fort !

1. Les feux de l'amour

Si Alice n'aime pas Jordan, alors Brenda n'aime pas Dan.

Si Brenda aime Jordan, alors Alice n'aime pas Jordan ; on en déduit donc : si Brenda aime Jordan, alors Brenda n'aime pas Dan.

Si Brenda n'aime pas Jordan, alors Brenda n'aime pas Dan.

Dans tous les cas, Brenda n'aime pas Dan.

2. Retour vers le futur

On compare l'âge ab et l'âge ba, où a est le chiffre des dizaines et b le chiffre des unités.

$$ab - ba = (10a + b) - (10b + a) = 9(a - b).$$

a) Le gain est donc toujours un multiple de 9. Pour gagner un maximum d'années, il faut prendre a aussi grand que possible et b aussi petit que possible, avec a > b.

$$\text{Gain maximal} = 9(9 - 0) = 81.$$

Le gain maximal est donc de 81 ans, obtenu en passant de 90 ans à 9 ans.

b) Gagner exactement 30 ans est impossible, car 30 n'est pas un multiple de 9.

3. Intelligence administrative

On compare les quatre parts de voix :

$$\frac{3}{20} = \frac{9}{60}, \quad \frac{1}{4} = \frac{15}{60}, \quad \frac{4}{15} = \frac{16}{60}, \quad \frac{1}{3} = \frac{20}{60}.$$

$$\text{On a donc :} \quad \frac{3}{20} < \frac{1}{4} < \frac{4}{15} < \frac{1}{3}.$$

Julie l'emporte, car elle obtient 1/3 des voix.

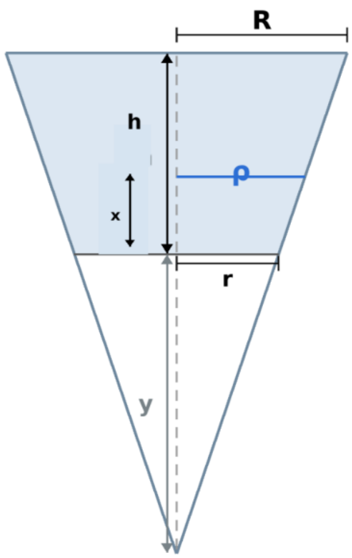
Par ailleurs, le nombre total de votants doit être un multiple commun des dénominateurs 4, 15, 20 et 3, donc un multiple de 60.

4. Une moitié de seau pas si bête

On note r le petit rayon, R le grand rayon et h la hauteur totale du tronc de cône.

a) On prolonge le seau en un cône complet. Si y désigne la hauteur du petit cône ajouté, on obtient par le théorème de Thalès :

$$\frac{y}{(y + h)} = \frac{r}{R}, \quad \text{d'où} \quad y = \frac{rh}{R - r}.$$



Le volume du seau est la différence entre le volume du grand cône et celui du petit cône :

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2(y+h) - \frac{1}{3}\pi r^2 y.$$

En remplaçant y par rh/(R-r) puis en simplifiant, on obtient

$$V = \frac{\pi h}{3}(r^2 + Rr + R^2).$$

b) On a, toujours avec le théorème de Thalès, $\frac{y}{y+x} = \frac{r}{\rho}$ dont on déduit que :

$$\rho = r + \frac{x(R-r)}{h}.$$

Cette formule vérifie bien les cas limites : pour x = 0, on retrouve ρ = r, et pour x = h, on retrouve ρ = R.

c) Ici $r = 1$, $R = 1{,}2$ et $h = 2$.

$$\rho(x) = 1 + 0{,}1x.$$

Le volume rempli à la hauteur x vaut alors

$$V(x) = \frac{\pi x}{3}(1 + \rho(x) + \rho(x)^2).$$

Le volume total vaut environ 7,624 ; la moitié vaut donc environ 3,812.

À la calculatrice, l'équation V(x) = 3,812 donne

$$x \approx 1{,}09.$$

On pouvait chercher autour de x = 1 puis au-dessus de cette valeur, car le seau est plus large en haut qu'en bas : la moitié du volume est donc atteinte pour une hauteur légèrement supérieure à la moitié de la hauteur totale.

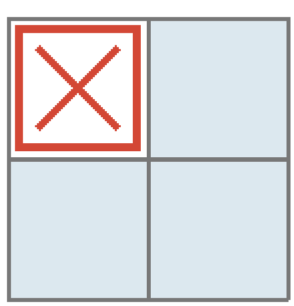
5. Triominos

a) Une grille $2^n \times 2^n$ possède $2^{2n} = 4^n$ cases.

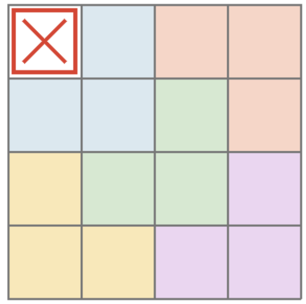
Or chaque triomino couvre 3 cases. Il faudrait donc que 3 divise 4^n, ce qui est impossible.

On ne peut donc pas paver une grille $2^n \times 2^n$ par des triominos.

b) Pour n = 1, la grille 2 × 2 privée d'une case se pave évidemment avec un seul triomino.

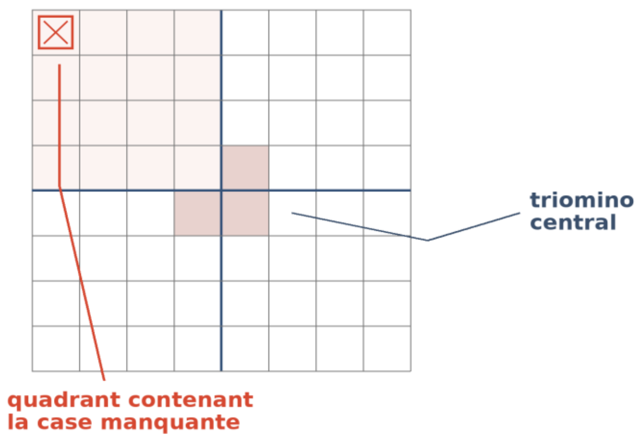


Pour n = 2, on peut construire explicitement un pavage de la grille 4×4 privée du carré en haut à gauche.



Pour le cas général, on découpe la grille $2^n \times 2^n$ en quatre quadrants de taille $2^{(n-1)} \times 2^{(n-1)}$.

Le quadrant qui contient la case manquante est déjà du bon type. Dans les trois autres quadrants, on place un triomino au centre, de façon à retirer une case de chacun d'eux.



On retrouve alors le même problème sur quatre grilles plus petites. On répète exactement ce procédé dans chaque quadrant.

Au bout d'un nombre fini d'étapes, on se ramène à des grilles 2×2 privées d'une case, qui se pavent chacune avec un triomino. On obtient ainsi un pavage de la grille initiale, sans recourir à une démonstration par récurrence.

c) Le même raisonnement fonctionne si l'on enlève n'importe quelle case de la grille initiale : on repère le quadrant qui contient cette case, puis on place le triomino central de manière à créer une case manquante dans chacun des trois autres quadrants.

Le résultat précédent reste donc vrai quelle que soit la case supprimée.

6. Sommes harmoniques

a) On calcule directement :

$$H_4 = H_3 + \frac{1}{4} = \frac{11}{6} + \frac{1}{4} = \frac{22}{12} + \frac{3}{12} = \frac{25}{12}.$$

b) Un code Python possible est le suivant.

```
def harmonique(n):
    s = 0
    for k in range(1, n + 1):
        s = s + 1 / k
    return s
```

c) Le terme binaire de H_n est l'inverse de la plus grande puissance de 2 présente parmi les termes 1, 1/2, …, 1/n.

- pour H_3, la plus grande puissance de 2 inférieure ou égale à 3 est 2, donc le terme binaire est 1/2 ;
- pour H_5, c'est 4, donc le terme binaire est 1/4 ;
- pour H_{20}, c'est 16, donc le terme binaire est 1/16.

d) Soit 2^k la plus grande puissance de 2 inférieure ou égale à n, avec $n \geq 2$.

On note L = ppcm(1, 2, …, n). Dans la décomposition en facteurs premiers de L, la plus grande puissance de 2 présente est exactement 2^k.

Ainsi, le quotient $L/2^k$ est impair. En revanche, pour tout i différent de 2^k, le quotient L/i est pair : en effet, i contient strictement moins de facteurs 2 que 2^k.

Dans la somme

$$LH_n = L + \frac{L}{2} + \cdots + \frac{L}{n},$$

tous les termes sont pairs sauf $L/2^k$, qui est impair. La somme entière est donc impaire.

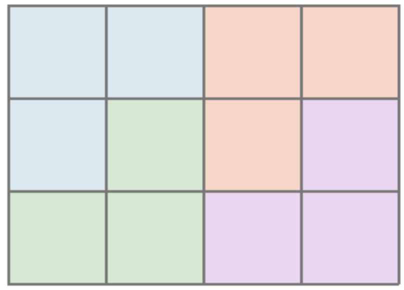
Si H_n était un entier, alors LH_n serait multiple de L, donc en particulier pair. C'est impossible.

Ainsi, H_n n'est jamais entier pour $n \geq 2$.

Exercice 3 – Triominos (bis)

1. Exemple de pavage pour a = 3 et b = 4

Voici un exemple de pavage d'une grille 3 × 4.



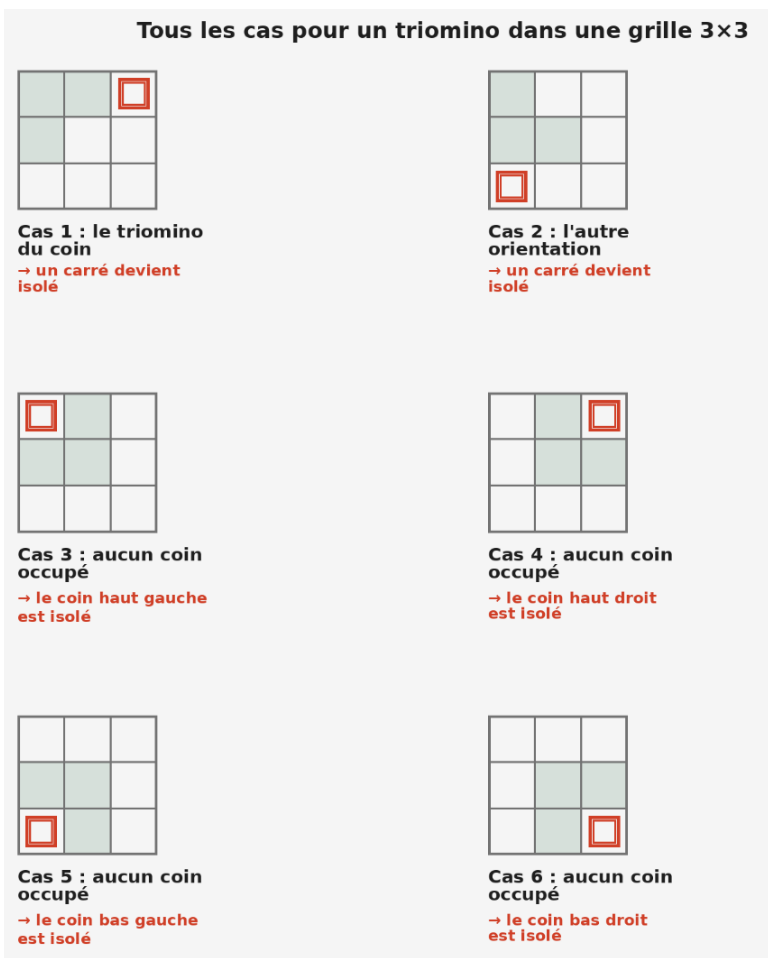
2. Premières conditions

a) Chaque triomino couvre 3 cases. Si une grille a × b est pavable, son aire ab doit donc être un multiple de 3.

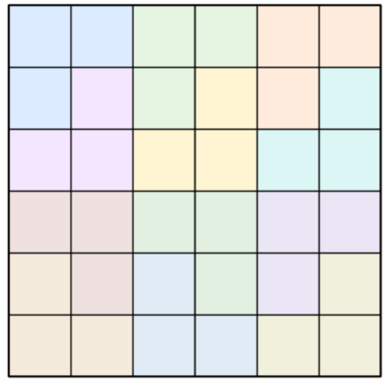
$$3 \mid ab.$$

b) Pour une grille carrée a × a, il faut donc que 3 divise a^2, donc que 3 divise a.

Le plus petit candidat positif est a = 3. Mais la grille 3 × 3 n'est pas pavable car elle laisse un carré isolé.



En revanche, la grille 6 × 6 est pavable. La plus petite grille carrée pavable est donc la grille 6 × 6.



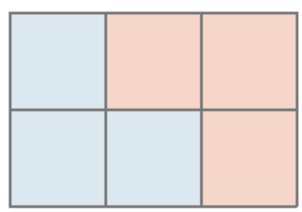
c) Non. La condition « 3 divise ab » n'est pas suffisante.

Le contre-exemple est précisément la grille 3 × 3 : son aire vaut 9, qui est divisible par 3, mais elle n'est pas pavable.

3. Cas des grilles 2 × b

Nécessité. Une grille 2 × b a une aire égale à 2b. Si elle est pavable, 3 doit diviser 2b, donc 3 doit diviser b.

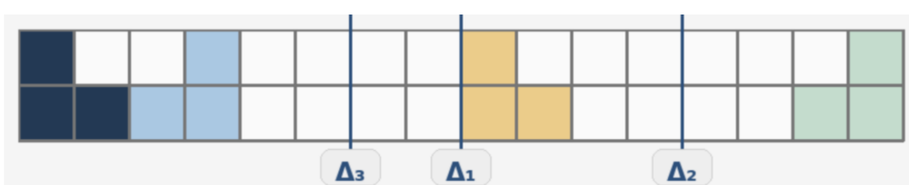
Réciproquement, si b est multiple de 3, on découpe la grille 2 × b en bandes 2 × 3, chacune pavable.



Une grille 2 × b est donc pavable si, et seulement si, b est divisible par 3.

4. Travaux manuels

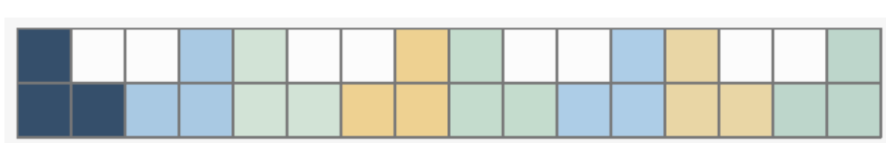
a) Le dessin des quatre triominos successifs sur le bandeau 2 × 16 est le suivant.



b) Chaque pliage remplace une symétrie axiale par une superposition.

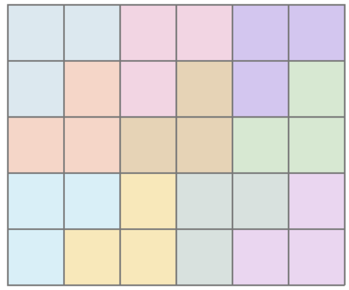
Après le premier pliage, on double le motif ; après le deuxième, on le redouble ; après le troisième, on obtient donc $2^3 = 8$ copies identiques du triomino initial.

Le découpage final fournit ainsi une farandole de 8 triominos identiques. Le deuxième bandeau fonctionne de la même manière.

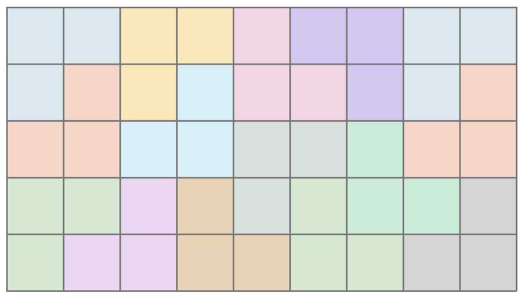


5. Cas a = 5

a) Voici un pavage possible d'une grille 5 × 6.



b) Voici un pavage possible d'une grille 5 × 9.



c) Soit b un multiple de 3 tel que b ≥ 6.

Alors b est soit de la forme 6k, soit de la forme 6k + 3 avec k ≥ 1.

Dans le premier cas, on juxtapose k grilles 5 × 6. Dans le second, on juxtapose k - 1 grilles 5 × 6 puis une grille 5 × 9.

Dans tous les cas, on obtient un pavage de la grille 5 × b.

6. Passage de a à a + 2

On suppose que b est divisible par 3 et qu'une grille a × b est pavable.

On ajoute en dessous une bande de hauteur 2, c'est-à-dire une grille 2 × b.

Or, d'après la question 3, cette bande 2 × b est pavable puisque b est divisible par 3.

En juxtaposant le pavage de a × b et celui de 2 × b, on obtient un pavage de (a + 2) × b.

7. Critère général pour a, b ≥ 4

Si $3 \mid b$, on écrit $b = 3k$et on découpe la grille $a \times b$en $k$rectangles $a \times 3$.
Or :

- si $a$est pair, un rectangle $a \times 3$se découpe en rectangles 2×3;
- si $a$est impair, avec $a \geq 5$, on écrit $a = 5 + 2m$, donc un rectangle $a \times 3$se découpe en un rectangle 5×3et des rectangles 2×3.

Comme 2×3et 5×3sont pavables, $a \times 3$est toujours pavable. Donc $a \times b$est pavable.
Si $3 \nmid b$, alors $3 \mid a$, et on raisonne de la même façon en échangeant $a$et b.
En tenant compte des petits cas 1, 2, 3, 4 et 5, on conclut : **Les grilles carrées pavables sont exactement les grilles a × a avec a ≥ 6 et 3 | a.**