

# Corrigé

## Partie 1. L'anniversaire de Marthe et Gabriel

1. On développe la méthode de Marthe :

Numéro du tour	Numéro des boîtes présentes à la fin du tour
1	2-4-6-8-10-12-14-16-18-20-22-24-26
2	4-8-12-16-20-24
3	8-16-24
4	16

Marthe ouvrira bien la boîte n°16.

2. Au premier tour, Gabriel élimine les boîtes numéro 1-4-7-10-13-16, etc. La boîte numéro 16 est donc éliminée dès le premier tour. Gabriel a raison.

On développe la méthode de Gabriel :

Numéro du tour	Numéro des boîtes présentes à la fin du tour
1	2-3-5-6-8-9-11-12-14-15-17-18-20-21-23-24-26
2	3-5-8-9-12-14-17-18-21-23-26
3	5-8-12-14-18-21-26
4	8-12-18-21
5	12-18
6	18

Gabriel ouvrira la boîte n°18.

## Partie 2. Avec la stratégie de Marthe

- Les boîtes encore présentes à la fin du premier tour sont celles dont le numéro est pair. En effet, comme on élimine la boîte n°1 puis toutes les boîtes de deux en deux, on élimine les boîtes dont le numéro est de la forme  $1 + 2k$  avec  $k$  entier, c'est-à-dire les numéros impairs.
- (a) Soit  $n$  le numéro d'une boîte encore présente à l'issue du premier tour. D'après la question précédente  $n$  est pair donc il existe un entier naturel non nul  $k$  tel que  $n = 2k$ . Au vu du processus d'élimination, la boîte numéro  $n$  se trouvera à la position  $k$  au début du deuxième tour. Le même raisonnement qu'à la question précédente nous permet d'affirmer que la boîte numéro  $n$  sera encore présente à la fin du deuxième tour si et seulement si  $k$  est pair.  
(b) D'après la question précédente, les boîtes encore présentes à la fin du deuxième tour sont celles dont le numéro est un multiple de 4. Leur numéro s'écrit donc sous la forme  $4k$  avec  $k$  entier naturel non nul. De plus, au début du troisième tour la boîte numéro  $4k$  est en position  $k$  et sera donc conservée si et seulement si  $k$  est pair, donc si et seulement si le numéro de la boîte est un multiple de 8.
- En poursuivant le raisonnement précédent, à la fin du tour  $p$  ne restent que les boîtes dont le numéro est un multiple de  $2^p$ . Comme  $2^{10} = 1024$  et  $2^{11} = 2048 > 2026$ , on sait qu'à l'issue du tour 10 la boîte numéro 1024 sera la seule boîte restante. La dernière boîte dans ce problème sera donc la boîte numéro 1024.

## Partie 3. Avec la stratégie de Gabriel

- (a) La division quasi-Euclidienne de 2026 par 3 est  $2026 = 3 \times 676 - 2$   
(b) La boîte n°2026 sera éliminée au premier tour. En effet, en éliminant la boîte n°1 puis les suivantes de 3 en 3, on élimine toutes les boîtes dont la division quasi-euclidienne par 3 est de la forme  $3q - 2$ , donc on élimine 2026.  
(c) À la fin du premier tour, on a éliminé toutes les boîtes dont le numéro est de la forme  $3q - 2$  avec  $1$  entier compris entre 1 et 676. On a donc éliminé 676 boîtes. Il en restera  $2026 - 676 = 1350$ .
- (a) D'après le raisonnement précédent, une boîte est éliminée au premier tour si et seulement si  $r = -2$ .  
(b) En reprenant le raisonnement précédent, le nombre de boîte éliminées au premier tour dont le numéro est inférieur ou égal à  $n$  est égal à  $q$ . Le nombre de boîtes restantes dont le numéro est inférieur ou égal à  $n$  est donc égal à  $n - q = 3q + r - q = 2q + r$ .

8. Le tableau complété est le suivant :

Numéro du tour		1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre de boîtes à la fin du tour	2026	1350	900	600	400	267	177	118	78

Numéro du tour	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Nombre de boîtes à la fin du tour	52	34	22	14	9	6	4	2	1

Justification de la valeur 400 :  $600 = 3 \times 200$ , donc on obtient le nombre de boîtes restantes par le calcul  $2 \times 200 + 0$ .

Justification de la valeur 266 :  $400 = 3 \times 134 - 2$ , on obtient le nombre de boîtes restantes par  $2 \times 134 - 2$ .

9. (a) À la fin du tour 16, il ne reste que deux boîtes. Au début du tour 17, on élimine la première de ces deux boîtes, donc la boîte restante est forcément en position 2 à la fin du tour 16.
- (b) D'après les questions 2.a et 2.b de la partie C, si une boîte est en position  $2p + r$  avec  $p > 1$  à l'issue du tour  $t$ , alors elle était en position  $3p + r$  à l'issue du tour  $t - 1$ . Ainsi :
- comme elle était en position 2 à la fin du tour 16, elle était en position  $2 \times 2 - 1 = 3$  à la fin du tour 15 ;
  - comme elle était en position 3 à la fin du tour 15, elle était en position  $2 \times 3 - 1 = 5$  à la fin du tour 14 ;
  - comme elle était en position 5 à la fin du tour 14, elle était en position  $2 \times 4 + 0 = 8$  à la fin du tour 13.

10. En poursuivant la même démarche jusqu'à la situation initiale, on a :

Numéro du tour	17	16	15	14	13	12	11	10	9
Position de la dernière boîte	1	2	3	5	8	12	18	27	41

Numéro du tour	8	7	6	5	4	3	2	1	0
Position de la dernière boîte	62	93	140	210	315	473	710	1065	1598

La dernière boîte se trouvait initialement en position 1598. Donc Gabriel ouvrira la boîte n°1598.

Source : *L'énigme maths du monde n°37*. Publiée le 7 décembre 2024. Problème posé par Mickaël Launay

## Résolution du problème en langage Wolfram (Mathematica)

```

1 In[1]:= nb = 26; boites = Range[nb];
2
3 In[2]:= f[lst_List, n_Integer] := Delete[lst, List /@ Range[1, Length[lst], n]]
4
5 f[boites, 2]
6
7 Out[3]= {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26}
8
9 In[4]:= FixedPointList[f[#, 2] &, boites]
10
11 Out[4]= {{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17,
12 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26}, {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16,
13 18, 20, 22, 24, 26}, {4, 8, 12, 16, 20, 24}, {8, 16,
14 24}, {16}, {}, {}}
15
16 In[5]:= FixedPointList[f[#, 3] &, boites]
17
18 Out[5]= {{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17,
19 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26}, {2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 12, 14,
20 15, 17, 18, 20, 21, 23, 24, 26}, {3, 5, 8, 9, 12, 14, 17, 18, 21,
21 23, 26}, {5, 8, 12, 14, 18, 21, 26}, {8, 12, 18, 21}, {12,
22 18}, {18}, {}, {}}
23
24 In[6]:= FixedPointList[f[#, 2] &, Range[2026]][[-3]]
25
26 Out[6]= {1024}
27
28 In[7]:= FixedPointList[f[#, 3] &, Range[2026]][[-3]]
29
30 Out[7]= {1598}

```

# Eclairage aléatoire

## Partie 1 – Des calculs d’aires

1. cf annexe.
2. a)  $A_0$  représente la moitié de l’aire du rectangle et  $A_1$  la moitié du quart de l’aire du rectangle.  
b) La zone 2 représente le double de la zone 1, et la zone 3 et la zone 1 ont même aire.  
c) Une équation de  $(OF)$  est  $y = \frac{10h}{L}x$  et une équation de  $(AC)$  est  $y = \frac{h}{L}x + \frac{h}{2}$ .  
On obtient  $(10h - \frac{h}{L})x = \frac{h}{2}$  ce qui donne  $x = \frac{L}{18}$ .  
Puis  $y = \frac{5h}{9}$ .  
d)  $A_{OAI} = \frac{1}{2} \times \frac{h}{2} \times \frac{L}{18} = \frac{hL}{72}$ .  
 $A_{AIE} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{5h}{9} - \frac{h}{2}\right) \times \frac{L}{18} = \frac{hL}{648}$ .

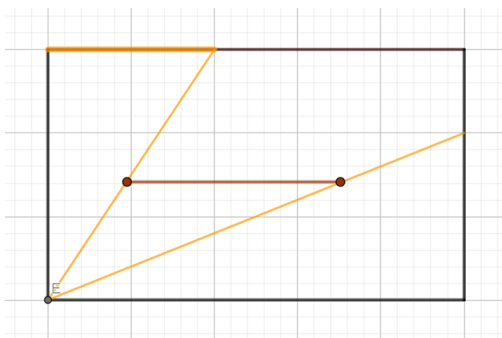
## Partie 2 – Des calculs de probabilité

3. a) Si ce n’est pas le cas, on a  $x_0 > \frac{L}{2}$  et donc  $x_0 + \frac{L}{2} > L$  et le segment n’est pas à l’intérieur du rectangle.  
b)  $A_T = \frac{1}{2}hL$ .
4. a)  $P(OHB) = \frac{2}{hL} \times \frac{hL}{8} = \frac{1}{4}$ .  
b)  $P(OIA) = \frac{2}{hL} \times \frac{hL}{72} = \frac{1}{36}$  et  $P(OBCI) = \frac{1}{2} - P(OAI) = \frac{17}{36}$ .  
c)  $P(AIE) = \frac{2}{hL} \times \frac{hL}{648} = \frac{1}{324}$  et  $P(EDCI) = \frac{1}{4} - P(AIE) = \frac{20}{81}$ .

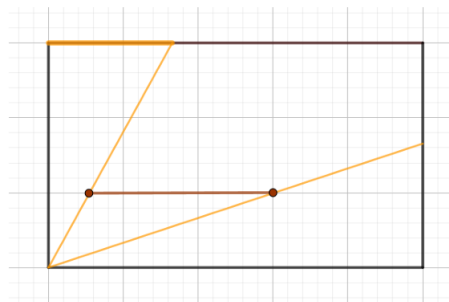
## Partie 3 – Probabilité de $E$

5. a) La pente de la droite  $(OM)$  est inférieure à celle de  $(OB)$  donc elle coupe le rectangle sur son côté droit donc  $g = 1$  et la droite  $(ON)$  également donc  $d = 0$ .  
b) La probabilité de  $E \cap Z_1$  est  $P(OHB) = \frac{1}{4}$ .
6. a) Le point  $M$  est situé sous la droite  $(AC)$ .  
L’équation réduite de  $(AC)$  est  $y = \frac{L/2}{h}x + \frac{h}{2} = \frac{h}{L}x + \frac{h}{2}$ . Donc  $y_0 \leq x_0 \frac{h}{L} + \frac{h}{2}$ .  
b) La pente de la droite  $(ON)$  est  $\frac{y_0}{x_0 + \frac{L}{2}}$  et celle de  $(OB)$  est  $\frac{h}{L}$ .  
On a  $\frac{y_0}{x_0 + \frac{L}{2}} \leq \frac{h}{L}$  équivalent à  $y_0 \leq (x_0 + \frac{L}{2}) \frac{h}{L} = x_0 \frac{h}{L} + \frac{h}{2}$  ce qui est vrai d’après la question précédente.  
c) La droite  $(ON)$  coupe le rectangle sur le côté donc  $d = 0$ .  
d) i) La pente de la droite  $(OM)$  est supérieure ou égale à celle de  $(OF)$ .  
ii) La droite  $(OM)$  coupe le haut du rectangle entre les points  $D$  et  $F$ .  
 $F$  a pour abscisse  $\frac{L}{10}$  donc  $g \leq \frac{1}{10}L$ .  
iii) L’événement  $E$  n’est pas réalisé car  $g + d \leq g + 0 \leq \frac{1}{10}L$ .  
e) En reprenant le raisonnement précédent, on a nécessairement  $g > \frac{1}{10}L$  et donc  $g + d > g + 0 > \frac{1}{10}L$  et  $E$  est réalisé.  
f) La probabilité de  $E \cap Z_2$  est  $P(OBCI) = \frac{17}{36}$ .
7. La probabilité de l’événement  $E \cap Z_3$  est  $P(EICD) = \frac{20}{81}$ .
8. Par disjonction de cas, on obtient  $P(E) = 0 + \frac{1}{4} + \frac{17}{36} + \frac{20}{81} = \frac{314}{324}$ .

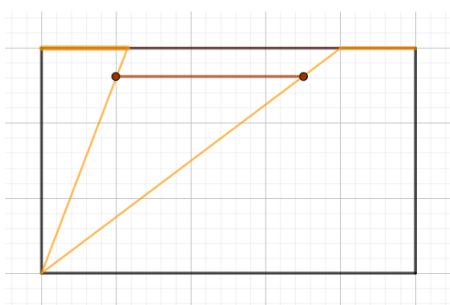
# Annexes



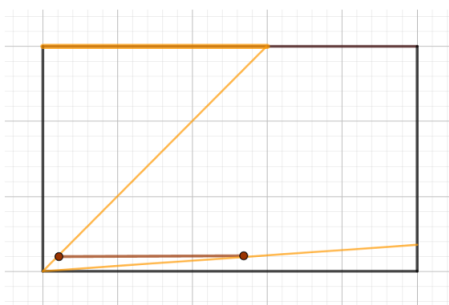
Réponse :  $E$  est réalisé



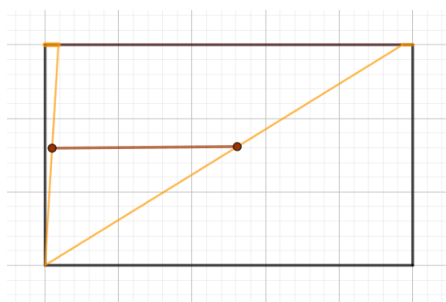
Réponse :  $E$  est réalisé



Réponse :  $E$  est réalisé



Réponse :  $E$  est réalisé



Réponse :  $E$  n'est pas réalisé