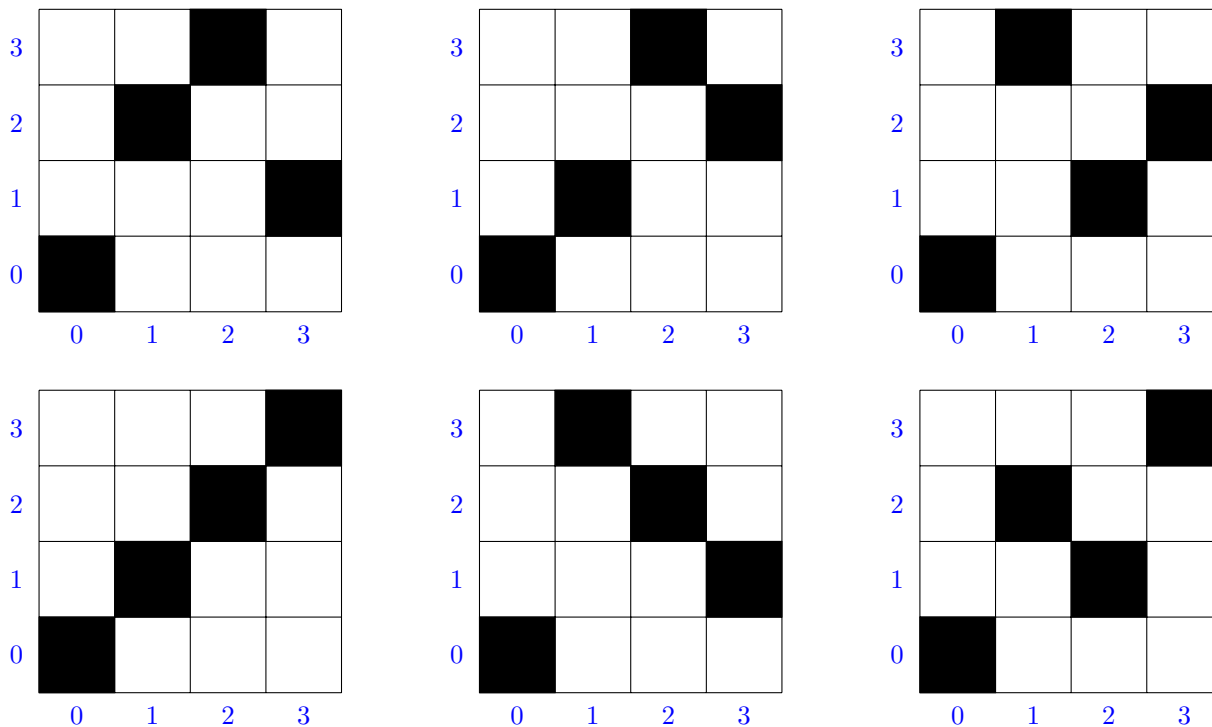


# Corrigé : Tissages mathématiques

## Partie 1

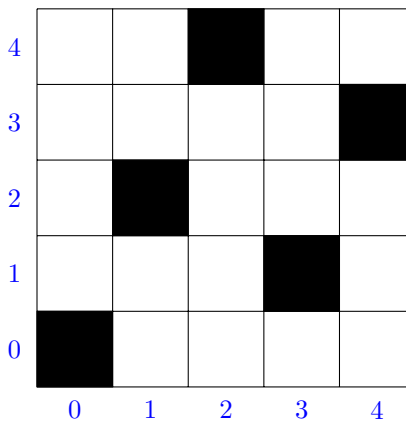
1.



2. Généralisation : on peut créer  $(p - 1) \times (p - 2) \times \dots \times 2 \times 1$  c'est-à-dire  $(p - 1)!$  satins de taille  $p$ .  
 En effet, l'ombre de coordonnées  $(0;0)$  est imposée. Il reste donc  $p - 1$  choix pour placer une ombre sur la deuxième ligne, jusqu'à un seul choix pour la dernière ligne.

## Partie 2

3. Voici la représentation d'un satin de taille 5 et de décochement 2.



$p = 5$  et  $a = 2$

Abscisse $x$ d'une ombre	0	1	2	3	4
$2x$	0	2	4	6	8
Division euclidienne de $2x$ par $p = 5$	$0 = 0 \times 5 + \mathbf{0}$	$2 = 0 \times 5 + \mathbf{2}$	$4 = 0 \times 5 + \mathbf{4}$	$6 = 1 \times 5 + \mathbf{1}$	$8 = 1 \times 5 + \mathbf{3}$
Coordonnées	$(0;0)$	$(1;2)$	$(2;4)$	$(3;1)$	$(4;3)$

4. **Satin régulier de taille 2 :**

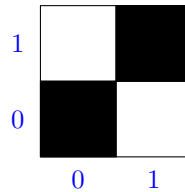
On cherche  $a$  tel que  $0 < a < 2$ . La seule valeur possible pour  $a$  est 1.

Vérifions que le satin de taille 2 et de décochement 1 est bien régulier :

Ombre	Ombre 0	Ombre 1
Coordonnées	(0;0)	(1;1)
$ax$	0	1
Division euclidienne de $ax$ par $p = 2$	$0 = 0 \times 2 + \mathbf{0}$	$1 = 0 \times 2 + \mathbf{1}$

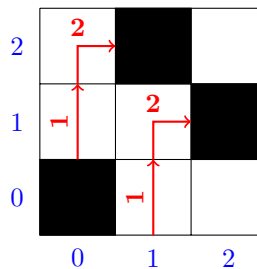
Pour toutes les ombres du satin, le reste dans la division euclidienne de  $ax$  par  $p$  est bien égal à l'ordonnée de chaque ombre. Donc pour qu'un satin de taille 2 soit régulier le décochement  $a$  associé doit être égal à 1.

Représentation :



5. **Satin régulier de taille 3 :**

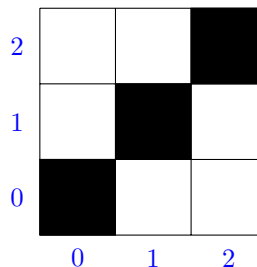
(a)



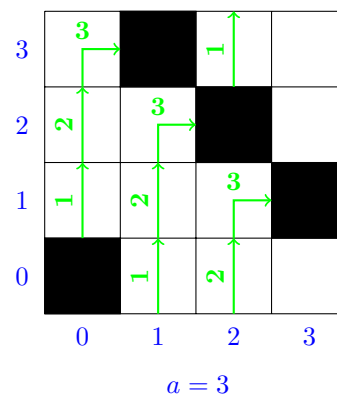
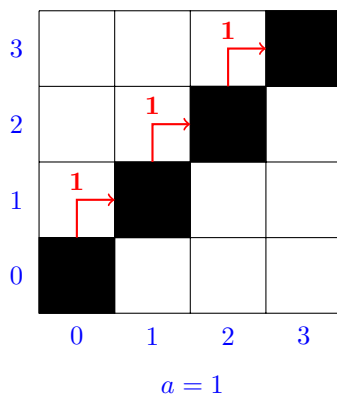
Le décochement associé à ce satin régulier de taille 3 est 2.

(b)

Voici une autre représentation d'un satin régulier de taille 3 et de décochement 1.



6. Parmi les satins de taille 4, il y en a 2 qui sont réguliers. En voici leur représentation :



7. D'après la propriété 2, on cherche un entier  $a$  tel que  $0 < a < 5$  et tel que  $a$  et 5 soient premiers entre eux. Or 5 est un nombre premier donc 1, 2, 3 et 4 vérifient les conditions.

On conclut que l'on peut créer 4 satins réguliers de taille 5.

## Partie 3

8. (a)  $a^2 + 1 = 5^2 + 1 = 26$ .  
26 est bien divisible par 13, donc le satin régulier de taille 13 et de décochement 5 est un satin carré.
- (b)  $a^2 + 1 = 7^2 + 1 = 50$ .  
50 est bien divisible par 25, donc le satin régulier de taille 25 et de décochement 7 est un satin carré.
9. Exemples de satins réguliers mais non carrés :  
— le satin régulier de taille  $p = 3$  et de décochement  $a = 2$ . En effet,  $2^2 + 1 = 5$  et 5 n'est pas divisible par 3.  
— le satin régulier de taille  $p = 4$  et de décochement  $a = 3$ . En effet,  $3^2 + 1 = 10$  et 10 n'est pas divisible par 4.  
— le satin régulier de taille  $p = 6$  et de décochement  $a = 5$ . En effet,  $5^2 + 1 = 26$  et 26 n'est pas divisible par 6.
10. (a) On considère un satin régulier de taille 5 et de décochement  $a$ . D'après la question 7, il existe quatre satins réguliers de taille 5.

$a$	1	2	3	4
$a^2 + 1$	2	5	10	17
Divisible par $p = 5$ ?	Non	Oui	Oui	Non

Pour  $a = 2$  et  $a = 3$ , le satin régulier de taille 5 et de décochement  $a$  est carré.

- (b) On considère un satin régulier de taille 10 et de décochement  $a$ .  
D'après la propriété 2,  $a$  et 10 sont premiers entre eux. Les valeurs de  $a$  possibles sont : 1, 3, 7 et 9.

$a$	1	3	7	9
$a^2 + 1$	2	10	50	82
Divisible par $p = 10$ ?	Non	Oui	Oui	Non

Pour  $a = 3$  et  $a = 7$ , le satin régulier de taille 10 et de décochement  $a$  est carré.

11. On lit graphiquement :  $A(4; 2)$  et  $B(5; 5)$ .  
 $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(5 - 4)^2 + (5 - 2)^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$ .

## Partie 4

12. (a) On a :  $\mathcal{A}_{satin} = p \times \mathcal{A}_{ABCD}$   
Or  $\mathcal{A}_{satin} = p \times p = p^2$  u.a.  
Donc  $p^2 = p \times \mathcal{A}_{ABCD}$   
D'où  $\mathcal{A}_{ABCD} = p$  u.a.
- (b)  $\mathcal{A}_{ABCD} = AB^2 = p$   
Donc  $AB = \sqrt{p}$ .
13. Le triangle  $OIH$  est rectangle en  $I$  (par construction). D'après le Théorème de Pythagore, on a :  
 $OH^2 = OI^2 + HI^2$   
 $\Leftrightarrow AB^2 = x^2 + y^2$   
 $\Leftrightarrow (\sqrt{p})^2 = x^2 + y^2$   
 $\Leftrightarrow p = x^2 + y^2$ .  
 $x$  et  $y$  sont des entiers donc  $p$  s'écrit comme une somme de deux carrés d'entiers.

### *Pour aller plus loin :*

On considère  $p$  premier et strictement supérieur à 2.  
Le mathématicien Édouard Lucas démontre que si  $p = 4k + 1$  avec  $k \in \mathbb{N}$  alors il existe deux satins carrés de taille  $p$ . De plus, on a démontré que la taille  $p$  d'un satin carré est la somme de deux carrés. Ainsi le Théorème des 2 carrés de Fermat en résulte : "Tout nombre premier de la forme  $4k + 1$  avec  $k \in \mathbb{N}$  est la somme de deux carrés".

**Partie 1 :**

1. (a)  $\Delta(E) = 2$  avec  $\{8\}|\{2; 4\}$                       (b)  $\Delta(E) = 1$  avec  $\{5\}|\{1; 3\}$   
     (c)  $\Delta(E) = 3$  avec  $\{5; 7\}|\{9\}$                       (d)  $\Delta(E) = 0$  avec  $\{5; 8\}|\{6; 7\}$
2. (a) i.  $\Delta(E) = S(A) - S(B)$  donc si  $\Delta(E) = 0$  alors  $S(A) = S(B)$  d'où  $S(E) = S(A) + S(B) = 2 S(B)$  donc paire.  
     ii. La réciproque est fautive comme dans l'exemple du 1.(a) où  $S(E) = 14$ , donc paire, mais  $\Delta(E) = 2 \neq 0$ .  
   (b) i. Si  $\Delta(E) = 1$  alors  $S(A) = S(B) + 1$  d'où  $S(E) = S(A) + S(B) = 2 S(B) + 1$  donc impaire.  
     ii. La réciproque est fautive comme dans l'exemple du 1.(c) où  $S(E) = 21$ , donc impaire, mais  $\Delta(E) = 3 \neq 1$ .

**Partie 2 :**

3.  $\Delta(E_2) = 1$  avec  $\{2\}|\{1\}$  ;                       $\Delta(E_3) = 0$  avec  $\{1; 2\}|\{3\}$   
      $\Delta(E_4) = 0$  avec  $\{1; 4\}|\{2; 3\}$ ;                       $\Delta(E_5) = 1$  avec  $\{3; 5\}|\{1; 2; 4\}$
4. On a  $\Delta(F_N) = 0$  avec la répartition  $\{N+1; N+4\}|\{N+2; N+3\}$
5. Soit une répartition des éléments de  $E_N$  optimale, dont l'écart vaut donc  $\Delta(E_N)$ .  
   En répartissant les quatre entiers suivants  $\{N+1; N+2; N+3; N+4\}$  en  $\{N+1; N+4\}|\{N+2; N+3\}$ , on obtient alors un écart identique pour  $E_{N+4}$ , égal à  $\Delta(E_N)$ , or  $\Delta(E_{N+4})$  étant le plus petit écart possible de  $E_{N+4}$ , on déduit que ce minimum est nécessairement inférieur ou égal à  $\Delta(E_N)$  donc  $\Delta(E_{N+4}) \leq \Delta(E_N)$ .  
   Enfin les écarts étant des entiers naturels, ils sont positifs donc  $0 \leq \Delta(E_{N+4}) \leq \Delta(E_N)$ .
6. (a) On a :  $0 \leq \Delta(E_{N+4}) \leq \Delta(E_N)$  donc si  $\Delta(E_N) = 0$  alors  $\Delta(E_{N+4}) = 0$ .  
   (b)  $\Delta(E_3) = 0$  et  $\Delta(E_4) = 0$  et d'après (a),  $\Delta$  reste nul en ajoutant 4 entiers naturels suivants, autant de fois que l'on souhaite, donc  $\Delta(E_N) = 0$  pour les entiers  $N$  est de la forme  $3 + 4k$  et  $4 + 4k$ , où  $k$  est un entier naturel.
7. (a) On a  $S(E_{N+4}) = [1 + 2 + \dots + N] + (N+1) + (N+2) + (N+3) + (N+4)$  donc  $S(E_{N+4}) = S(E_N) + 4N + 10$   
   (b) Si  $\Delta(E_N) = 1$ , d'après 2.(b) i.,  $S(E_N)$  est impaire, or comme  $S(E_{N+4}) = S(E_N) + (4N + 10)$  avec  $4N + 10 = 2(2N + 5)$  paire, alors  $S(E_{N+4})$  est également impaire, donc d'après 2.(a) i.,  $\Delta(E_{N+4}) \neq 0$  (par contraposition ou par l'absurde).  
   (c)  $0 \leq \Delta(E_{N+4}) \leq \Delta(E_N)$  donc  $0 \leq \Delta(E_{N+4}) \leq 1$  et comme  $\Delta(E_{N+4})$  est non nul d'après (b), on a :  $\Delta(E_{N+4}) = 1$ .  
   (d) Comme  $\Delta(E_2) = 1$  et  $\Delta(E_5) = 1$ , on déduit avec (c) que  $\Delta(E_N) = 1$  si  $N = 2 + 4k$  ou  $N = 5 + 4k$ ,  $k$  entier naturel.
8. Par application du 6.(b) et du 7.(d) :  
      $2025 = 5 + 4 \times 505$  donc  $\Delta(E_{2025}) = 1$                        $2026 = 2 + 4 \times 506$  donc  $\Delta(E_{2026}) = 1$   
      $2027 = 3 + 4 \times 506$  donc  $\Delta(E_{2027}) = 0$                        $2028 = 4 + 4 \times 505$  donc  $\Delta(E_{2028}) = 0$
9. Soit  $N = a + 4k$  avec  $a \in \{2; 3; 4; 5\}$  et  $k \in \mathbb{N}$ , on a vu que  $\Delta(E_N) = \Delta(E_a)$  ( $= 0$  si  $a = 3$  ou  $4$ ,  $= 1$  si  $a = 2$  ou  $5$ )  
   On répartit les  $a$  premiers entiers de  $E_a$  comme vu à la question 3. pour obtenir l'écart minimum  $\Delta(E_a)$ .  
   Avec les  $4k$  entiers suivants, on forme  $k$  groupes de 4 entiers consécutifs, du type  $\{p; p+1; p+2; p+3\}$ , que l'on répartit selon  $\{p+1; p+4\}|\{p+2; p+3\}$ , laissant ainsi invariant l'écart, égal à  $\Delta(E_a)$ .  
   Comme  $\Delta(E_N) = \Delta(E_a)$  on obtient ainsi une répartition optimale. CQFD.