Correction exercice horizon

Partie 1 :

Question 1 : En traçant la droite (VS) et en observant, on constate que :

- les points G et H ne sont pas visibles
- le point I est visible

Question 2 : AV correspond à la portée visuelle théorique.
D'après le théorème de Pythagore : $AV^2 = 6370{,}002^2 - 6370^2$ et $AV \simeq 5{,}048$ km.

Question 3 : $\sin(\widehat{OVA}) = \dfrac{OA}{OV}$ et $\widehat{OVA} \simeq 89{,}95\,°$

Question 4 : D'après le théorème de Pythagore : $OV^2 = 6370^2 + 100^2$ et $OV \simeq 6370{,}785$ km.
L'observateur sera ainsi situé à 785 m d'altitude ($6370{,}785 - 6370 = 0{,}785$ km).

Question 5 : Comme à la question précédente : $OV^2 = 6370^2 + 200^2$ et $OV \simeq 6373{,}139$ km.
L'observateur sera ainsi situé à 3139 m d'altitude : $3139 \neq 2 \times 785$ =. L'affirmation est donc fausse.

Question 6 : D'après le théorème de Pythagore : $AV^2 = 6370{,}1^2 - 6370^2$ et $AV \simeq 35{,}69$ km.
Comme 35,69 > 30, on peut ainsi voir le bâteau.

Partie 2 :

Question 7 : $\cos(\widehat{AOV}) = \dfrac{OA}{OV} = \dfrac{R}{R+h}$

Question 8 : $\widehat{AOB} = \beta - \widehat{AOV}$

Question 9 :

a. $\cos(\widehat{AOV}) = \dfrac{OA}{OV} = \dfrac{6370}{6371}$ et $\widehat{AOV} \simeq 1{,}02\,°$.

b. $\widehat{AOB} \simeq 2 - 1{,}02 = 0{,}98\,°$.

c. $x \simeq 0{,}932$ km . L'altitude du point B est ainsi de 932 m.

Question 10 : En reprenant la démarche précédente, on obtient que l'altitude du point visible est d'environ 1,305 km = 1305 m
Comme 1305 > 700, alors le point B ne peut être visible.

Correction de l'exercice « Une figure riche»

Partie 1 : nombre de pièces et d'espaces d'une figure riche

1. Voici le tableau rempli :

Nombre de pièces à la base	2	3	4	5
Nombre de pièces formant la figure riche	3	6	10	15
Nombre d'espace entre les pièces	1	4	9	16

2. La figure riche est formée de n niveau.
3. Au niveau 1, il y a n pièces, à l'niveau 2, il y a une pièce de moins, donc $n-1$ pièces, au niveau k, il y a $k-1$ disque de moins, donc $n-(k-1)=n-k+1$ pièces, et au dernier niveau, un seul disque. Conclusion : pour $1 \leqslant k \leqslant n$, à l'niveau k, il y a $n-k+1$ pièces.
4. Comptant les pièces en partant du prermier niveau : au total il y a $n+(n-1)+\ldots+2+1=\dfrac{n(n+1)}{2}$ pièces.
5. On reconnait la suites des carrées parfaits, mais décalée d'un cran par rapport au nombre de disque à la base. Ainsi, le nombre d'espace pour une figure riche avec une base de n pièces et $(n-1)^2$.

Partie 2 : aire d'un espace vide

6. On applique le théorème de Pythagore dans le triangle ACH :
$$AC^2 = AH^2 + HC^2$$
En utilisant $AC^2=(2R)^2=4R^2$ et $AH^2=R^2$, cela donne :
$$4R^2 = R^2 + HC^2 \iff HC^2 = 3R^2 \iff HC = \sqrt{3}\times R.$$
7. On applique la formule : $\mathcal{A}_{ABC} = \dfrac{\text{base}\times\text{hauteur}}{2}$:
$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{AB\times HC}{2} = \frac{2R\times\sqrt{3}\times R}{2} = \sqrt{3}\times R^2$$
8. Ce secteur AIH a un angle d'ouverture de $60°$, il représente un sixième du disque de centre A et de rayon R. Puisque le disque entier a pour aire πR^2, on déduit $\mathcal{A} = \dfrac{\pi R^2}{6}$.
9. L'aire de l'espace vide est : $\mathcal{A}_{ABC} - 3\times\mathcal{A} = \sqrt{3}\times R^2 - 3\times\dfrac{\pi R^2}{6} = R^2(\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{2})$.

Partie 3 : espace occupé

Notons $\mathcal{A}_d$ l'aire occupée par les pièces, $\mathcal{A}_e$ l'aire occupée par les espaces entre les pièces, et $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_d + \mathcal{A}_e$ l'aire totale de la figure riche. La proportion de surface occupée par les pièces est :
$$p = \frac{\mathcal{A}_d}{\mathcal{A}_t}.$$

10. Il y a $\dfrac{n(n+1)}{2}$ pièces, chacun d'aire πR^2, d'où la formule pour l'aire occupée par les pièces :$\mathcal{A}_d = \dfrac{n(n+1)}{2}\pi R^2$.
11. Il y a $(n-1)^2$ pièces, chacun d'aire $R^2(\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{2})$, d'où $\mathcal{A}_e = (n-1)^2R^2\left(\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{2}\right)$.
12. En utilisant les deux questions précédentes :
$$p = \frac{\dfrac{n(n+1)\pi R^2}{2}}{\dfrac{n(n+1)\pi R^2}{2} + (n-1)^2R^2(\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{2})} = \frac{R^2\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\pi\right)}{R^2\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\pi + (n-1)^2\left(\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{2}\right)\right)}$$
On simplifie par R^2 :
$$p = \frac{\dfrac{n(n+1)\pi}{2}}{\dfrac{n(n+1)\pi}{2} + (n-1)^2(\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{2})}$$
Cette formule ne dépend pas de R.