MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques 2026

ACADÉMIE DE NICE
Liberté
Égalité
Fraternité

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune.

Les énoncés des deux parties sont donc séparés, distribués puis ramassés à des moments différents.

Une des deux parties de l'épreuve est constituée des exercices nationaux, l'autre des exercices académiques. À l'issue de la première partie, les énoncés et les copies sont ramassées et une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie à l'issue de laquelle les copies et les énoncés sont également ramassés.

Exercices académiques

Résolution en équipe

Candidats de la voie générale suivant la «spé maths»

Déroulement de l'épreuve constituée des exercices académiques (2 heures) :

Il n'est pas nécessaire de résoudre toutes les questions des deux exercices pour obtenir en fin de compte la note ou une appréciation maximales.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des recherches qu'ils ont pu entreprendre. **Il est également conseillé d'accorder une heure à un premier exercice, puis de passer au deuxième quitte à revenir ensuite au premier.**

Les règles, compas, rapporteurs, équerres et calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

L'énoncé académique comporte 8 pages.

Exercice 1

La boîte surprise

Partie 1 : l'anniversaire de Sophie et Évariste

Pour leur anniversaire, les jumeaux Sophie et Évariste ont reçu un cadeau. Il s'agit d'un lot de 26 boîtes, numérotées de 1 à 26, contenant une surprise. Chacun d'eux doit ouvrir une seule boîte.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

Sophie a une idée. Elle va ouvrir sa boîte selon une méthode bien précise :

- Elle élimine la boîte n° 1, conserve la boîte n° 2, élimine la n° 3, conserve la n° 4 et poursuit ainsi de suite en éliminant une boîte sur deux jusqu'à avoir parcouru la liste des 26 boîtes ;
- À la fin de ce premier tour, elle recommence avec les boîtes conservées précédemment. Dans l'ordre croissant des numéros, elle élimine la première de ces boîtes (donc elle élimine la boîte numérotée 2), conserve la deuxième (la boîte numérotée 4), élimine la troisième (la boîte numérotée 6) et ainsi de suite ;
- Elle poursuit ainsi en effectuant autant de tours que nécessaire jusqu'à ce qu'il ne reste qu'une seule boîte. Cette ultime boîte est celle qu'elle ouvrira pour découvrir sa surprise.

Évariste décide de s'inspirer de l'idée de sa sœur mais il choisit, pour sa part, de n'éliminer qu'une boîte sur trois. Ainsi, au premier tour, il élimine la boîte n° 1, conserve les boîtes n° 2 et n° 3, élimine la n° 4, conserve les n° 5 et n° 6 et poursuit ainsi de suite.

1. Compléter le tableau dans **l'annexe (à rendre avec la copie)** afin de montrer que Sophie ouvrira la boîte n° 16.
2. Évariste pense qu'avec sa méthode, il n'ouvrira pas la même boîte que sa sœur.
   a) À quel tour sera éliminé la boîte n° 16 ?
   b) Compléter le tableau dans **l'annexe (à rendre avec la copie)** afin de donner le numéro de la boîte qu'ouvrira Évariste.

Partie 2 : 2026 boîtes avec la méthode de Sophie

On considère 2026 boîtes, et on élimine à chaque tour la première boîte puis les boîtes suivantes **de deux en deux**.

3. Que peut-on dire sur le numéro des boîtes conservées à la fin du premier tour ?
4. Soit n un entier naturel non nul et pair. On considère donc un entier naturel non nul k tel que $n = 2k$.
   a) À quelle condition sur k la boîte numéro n est-elle conservée à la fin du deuxième tour ?
   b) Quelles sont les boîtes conservées à la fin du troisième tour ?
5. Avec la méthode de Sophie, quel sera le numéro de la dernière boîte ?

Partie 3 : 2026 boîtes avec la méthode d'Évariste

On considère 2026 boîtes, et on élimine à chaque tour la première boîte puis les boîtes suivantes **de trois en trois**.

On appelle **division quasi-euclidienne** d'un nombre entier n par 3 l'écriture $n = 3q + r$ où q et r sont des nombres entiers avec $-2 \leqslant r \leqslant 0$.

Par exemple,

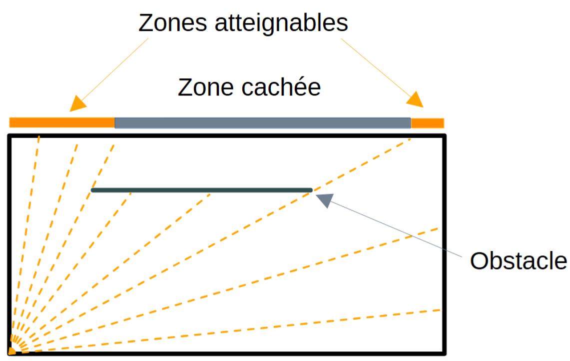
- la division quasi-euclidienne de 26 par 3 est $26 = 3 \times 9 - 1$ (on a donc ici $q = 9$ et $r = -1$).
- la division quasi-euclidienne de 27 par 3 est $27 = 3 \times 9 + 0$ (on a donc ici $q = 9$ et $r = 0$).

6. a) Écrire la division quasi-euclidienne de 2026 par 3.
   b) La boîte n°2026 sera-t-elle éliminée au premier tour ?
   c) Combien de boîtes restera-t-il à la fin du premier tour ?
7. Soit n un numéro de boîte ($1 \leqslant n \leqslant 2026$).
   On écrit la division quasi-euclidienne de n par 3 sous la forme $n = 3q + r$.
   a) À quelle condition sur r la boîte numéro n est-elle éliminée au premier tour ?
   b) Justifier, qu'à l'issue du premier tour, le nombre de boîtes restantes dont le numéro est inférieur ou égal à n est égal à $2q + r$.
8. Compléter le tableau dans **l'annexe (à rendre avec la copie)**.
9. On considère, par la suite, la dernière boîte présente c'est-à-dire la seule à l'issue du dix-septième tour.
   a) Justifier que cette boîte était en position 2 à la fin du seizième tour.
   b) Justifier qu'elle était en position 3 à la fin du quinzième tour, en position 5 à la fin du quatorzième tour et en position 8 à la fin du treizième tour.
10. Avec la méthode d'Évariste, quel sera le numéro de la dernière boîte ?

Exercice 2

Éclairage aléatoire

Un jeu vidéo très simple consiste, à l'aide d'un rayon laser placé dans le coin inférieur gauche de l'écran, à éclairer le haut de l'écran. On place un obstacle opaque entre la source du rayon laser et le haut de l'écran. Ainsi certaines zones du haut de l'écran sont atteignables par le laser tandis que d'autres ne le sont pas.

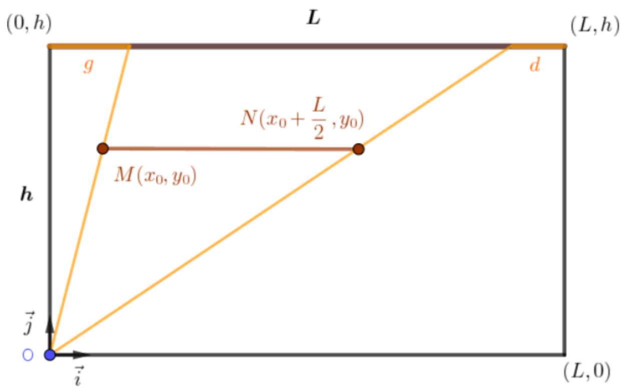


Écran

On modélise la situation en considérant un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ dont l'origine représente le coin inférieur gauche de l'écran. L'écran est assimilé à un rectangle de largeur $L > 0$ et de hauteur $h > 0$.
L'obstacle est représenté par un segment horizontal dont l'extrémité gauche notée M a pour coordonnées (x_0, y_0) avec $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$.

Dans cet exercice, on considère un segment de longueur $\mathbf{\frac{L}{2}}$.

Ainsi, l'extrémité droite du segment notée N a pour coordonnées $\left(x_0 + \dfrac{L}{2}, y_0\right)$.
On note g la longueur du segment correspondant à la partie supérieure gauche qui peut être éclairée par le laser (si elle existe) et d celle de la partie supérieure droite qui peut être éclaisée par le laser (si elle existe).



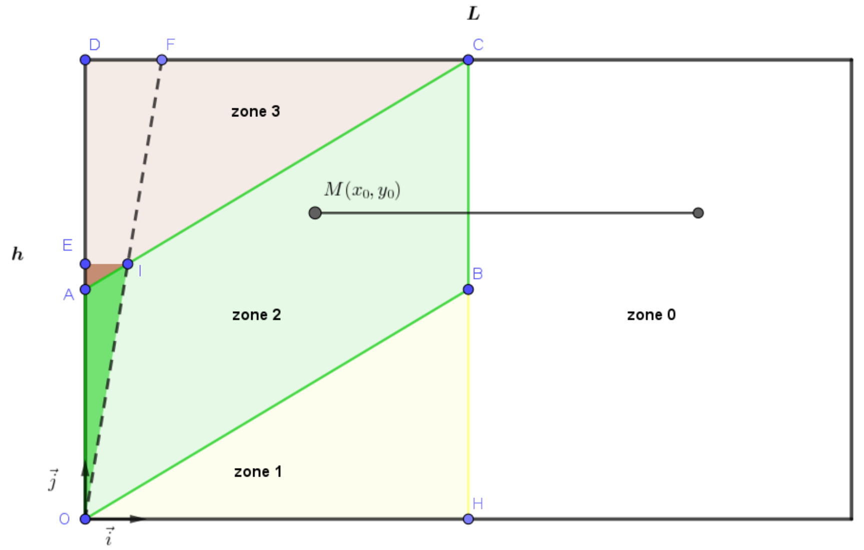
Le but de l'exercice est le suivant :
On place au hasard le segment à l'intérieur du rectangle et l'on s'intéresse à la probabilité de l'événement noté E :

« La zone qui ne peut pas être éclairée par le laser représente **au maximum** 90% de la largeur L. »

Partie 1 : des calculs d'aires

1. Sur l'**annexe (à rendre avec la copie)**, pour chaque exemple tracer la zone qui peut être éclairée comme indiqué sur le schéma déjà complété sur l'annexe et indiquer si l'événement E est réalisé ou non.
2. On partage le rectangle en quatre zones principales comme indiqué sur le schéma suivant.

   La zone 2 ($OBCA$) et la zone 3 (ACD) comportent un triangle spécifique.



   Les points indiqués ont pour coordonnées :
   $A\left(0, \dfrac{h}{2}\right)$, $B\left(\dfrac{L}{2}, \dfrac{h}{2}\right)$, $C\left(\dfrac{L}{2}, h\right)$, $D\,(0, h)$, $E\left(0, \dfrac{5}{9}h\right)$, $F\left(\dfrac{1}{10}L, h\right)$, $H\left(\dfrac{h}{2}, 0\right)$

   a) Justifier que l'aire de la zone 0 vaut $\mathcal{A}_0 = \dfrac{hL}{2}$ et que celle de la zone 1 vaut $\mathcal{A}_1 = \dfrac{hL}{8}$.
   b) Calculer les aires $\mathcal{A}_2$ et $\mathcal{A}_3$ des zones 2 et 3 respectives.
   c) Soit I le point d'intersection des droites (OF) et (AC). Montrer que les coordonnées de I sont $I\left(\dfrac{L}{18}, \dfrac{5}{9}h\right)$.
   d) En déduire que l'aire du triangle OAI vaut $\mathcal{A}_{OAI} = \dfrac{1}{72}hL$ et que celle du triangle AIE vaut $\mathcal{A}_{AIE} = \dfrac{1}{648}hL$.

Partie 2 : des calculs de probabilités

L'obstacle (le segment horizontal) est placé au hasard à l'intérieur du rectangle c'est-à-dire que l'on choisit au hasard les coordonnées du point $M(x_0, y_0)$ avec $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$.

3. a) Justifier que le point M ne peut être qu'à l'extérieur de la zone 0.
   b) On note T la surface où l'on peut placer le point M. Que vaut l'aire de T notée $\mathcal{A}_T$?

> **Définition des probabilités :**
> On considère une surface S contenue dans le rectangle. On définit la probabilité de l'événement « le point M appartient à la surface S » par $P(S) = \dfrac{2}{hL}\text{Aire}(S)$.

4. a) Vérifier que $P(OHB) = \dfrac{1}{4}$.
   b) Montrer que $P(OIA) = \dfrac{1}{36}$ et que $P(OBCI) = \dfrac{17}{36}$.
   c) Déterminer $P(AIE)$ et $P(EICD)$.

Partie 3 : probabilité de E

On rappelle que l'événement E est « La zone qui ne peut pas être éclairée par le laser représente **au maximum** 90% de la largeur L. », ce qui peut se traduire par l'inégalité $g+d > \dfrac{1}{10}L$.
Pour $i \in \{1,2,3\}$, on note Z_i l'événement : « le point M est dans la zone i ».

5. Dans cette question, on suppose que le point M est situé dans la zone 1.
   a) Justifier que $d=0$ et que $g=L$.
   b) En déduire que la probabilité de l'événement $E \cap Z_1$ vaut $\dfrac{1}{4}$.

> Dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, une droite (D) d'équation $y=ax+b$ partage le plan en deux parties distinctes.
> L'ensemble des points (x_0,y_0) situés au-dessus de la droite vérifient l'inégalité $y_0 > ax_0+b$,
> et ceux situés en-dessous vérifient l'inégalité $y_0 < ax_0+b$.
> On a égalité si le point (x_0,y_0) est situé sur la droite.

6. Dans cette question, on suppose que le point M est situé dans la zone 2.
   a) Justifier que $y_0 \leqslant x_0\dfrac{h}{L}+\dfrac{h}{2}$ en considérant la droite (AC).
   b) Quelle est la pente de la droite (ON) ?
   Justifier que celle-ci est inférieure à la pente de la droite (OB).
   c) En déduire que $d=0$.
   d) Dans cette question, on suppose que M est dans le triangle OIA.
      i. Comparer les pentes des droites (OM) et (OF) ?
      ii. En déduire que $g \leqslant \dfrac{1}{10}L$.
      iii. L'événement E est-il réalisé ?
   e) Dans cette question, on suppose de plus que M n'est pas dans le triangle OIA.
   En déduire que E est réalisé.
   f) En déduire la probabilité de l'événement $E \cap Z_2$.

7. Dans cette question, on suppose que le point M est situé dans la zone 3.
   On admet que E n'est réalisé que si M est dans le quadrilatère $EICD$.
   En déduire la probabilité de l'événement $E \cap Z_3$.

8. En déduire que $P(E)=\dfrac{314}{324}$.

Annexe de l'exercice «La boîte surprise»

À rendre avec la copie

Question 1 : méthode de Sophie.

Numéro du tour	Numéro des boîtes présentes à la fin du tour
1	2-4-6-8-10-12-14-16-18-20-22-24-26
2	
3	
4	

Question 2 : méthode d'Évariste.

Numéro du tour	Numéro des boîtes présentes à la fin du tour
1	2-3-5-6-8-9-11-12-14-15-17-18-20-21-23-24-26
2	
3	
4	
5	
6	

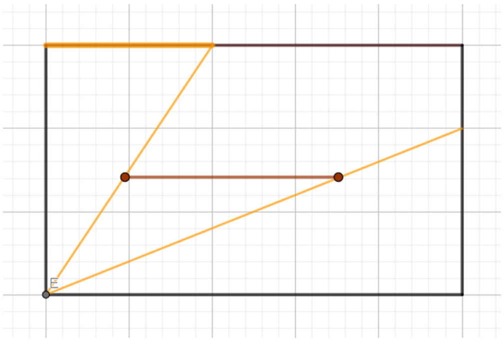
Question 8.

Numéro du tour	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre de boîtes à l'issue du tour	2026		900	600			177	118	

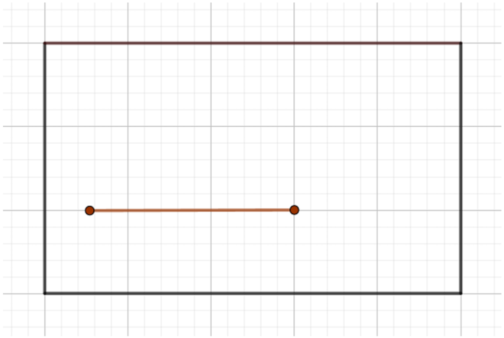
Numéro du tour	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Nombre de boîtes à l'issue du tour	52		22		9	6	4	2	1

Annexe de l'exercice «Éclairage aléatoire»

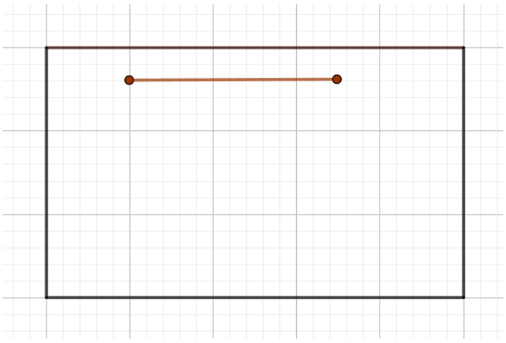
À rendre avec la copie



Réponse : E est réalisé

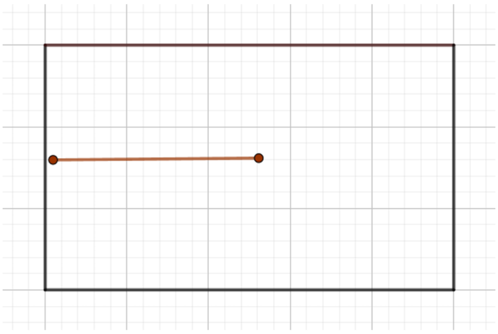


Réponse :



Réponse :

Réponse :



Réponse :