Olympiades nationales de mathématiques 2026

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune.

Les énoncés des deux parties sont donc séparés, distribués puis ramassés à des moments différents.

Une des deux parties de l'épreuve est constituée des exercices nationaux, l'autre des exercices académiques. À l'issue de la première partie, les énoncés et les copies sont ramassées et une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie à l'issue de laquelle les copies et les énoncés sont également ramassés.

Exercices académiques

Résolution individuelle

Candidats de la voie générale suivant la «spé maths»

Déroulement de l'épreuve constituée des exercices académiques (2 heures) :

Il n'est pas nécessaire de résoudre toutes les questions des deux exercices pour obtenir en fin de compte la note ou une appréciation maximales.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des recherches qu'ils ont pu entreprendre. **Il est également conseillé d'accorder une heure à un premier exercice, puis de passer au deuxième quitte à revenir ensuite au premier.**

Les règles, compas, rapporteurs, équerres et calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

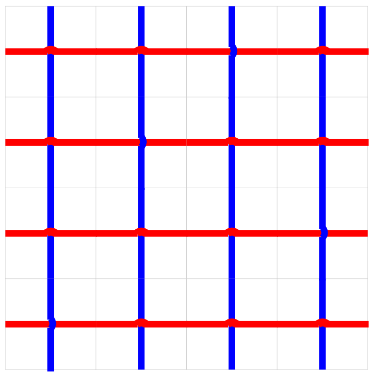
Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

L'énoncé académique comporte 8 pages.

Exercice 1

Tissages mathématiques

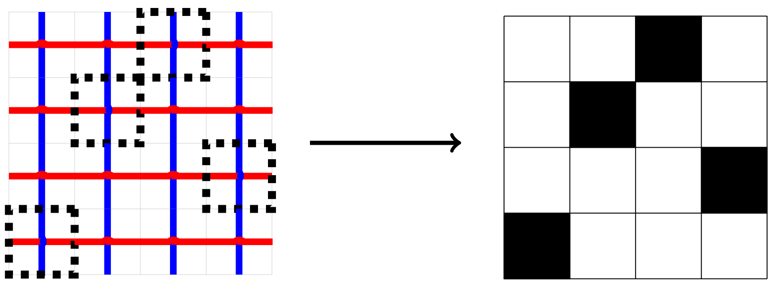
Le tissage consiste à croiser des fils verticaux avec des fils horizontaux pour former un tissu.



On se propose de modéliser mathématiquement le tissage par une grille où :

- les colonnes représentent les fils verticaux ;
- les lignes représentent les fils horizontaux ;
- les cases noires représentent le passage d'un fil vertical au-dessus d'un fil horizontal ;
- les cases blanches représentent le passage d'un fil horizontal au-dessus d'un fil vertical.

Illustration :



Définition 1 : Soit p un entier naturel non nul.
On appelle **grille** de dimension $p \times p$, un quadrillage carré constitué de p^2 cases carrées de côté 1.
La grille comporte des cases noires appelées **ombres** et des cases blanches.

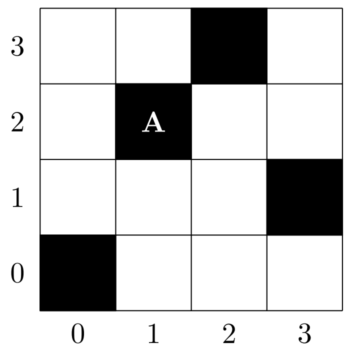
Dans une grille de dimension $p \times p$, chaque case de la grille est repérée par des **coordonnées** $(x; y)$ telles que :

- x représente l'indice de la colonne (un **entier** compris entre 0 et $p-1$)
- y représente l'indice de la ligne (un **entier** compris entre 0 et $p-1$).

Partie 1 : satin de taille p

Définition 2 : Un **satin de taille** p est une grille de dimension $p \times p$ constituée de p ombres telles qu'il existe une **unique** ombre sur chaque ligne et sur chaque colonne.
Par convention, **la case de coordonnées $(0; 0)$ correspond toujours à une ombre** (case noire).

Exemple 1 : Voici la représentation d'un **satin de taille** 4. L'ombre A a pour coordonnées $(1;2)$.



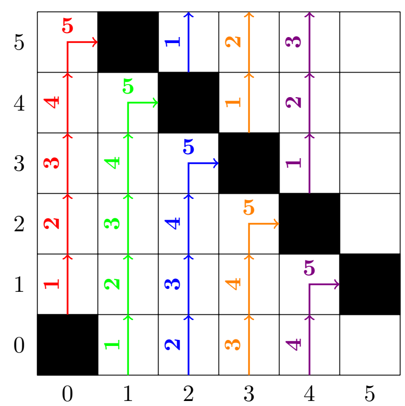
1. Sur l'annexe 1, représenter les 5 autres satins de taille 4 que l'on peut créer.
2. Généralisation : exprimer en fonction de p le nombre de satins de taille p que l'on peut créer. Aucune justification n'est demandée.

Partie 2 : satin régulier de taille p et de décochement a

Propriété 1 : Soit $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe un unique couple $(q;r)$ d'**entiers naturels** tel que : $m = nq + r$ avec $r < n$.
r est appelé le **reste de la division euclidienne** de m par n.

Définition 3 : Soient a et p deux entiers naturels non nuls tels que $a < p$.
Un satin de taille p est dit **régulier de taille** p **et de décochement** a si les p ombres du satin ont pour coordonnées :
$(x;r)$ où x un entier compris entre 0 et $p-1$ et r est le reste de la division euclidienne de ax par p.

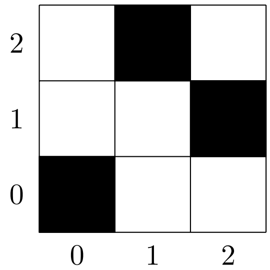
Exemple 2 :
Voici la représentation du **satin régulier de taille** 6 **et de décochement** 5.
Avec $a = 5$ et $p = 6$, on a bien $0 < a < p$.
Le décochement a peut se déterminer graphiquement :



Ombre	Ombre 0	Ombre 1	Ombre 2	Ombre 3	Ombre 4	Ombre 5
Coordonnées	$(0;\mathbf{0})$	$(1;\mathbf{5})$	$(2;\mathbf{4})$	$(3;\mathbf{3})$	$(4;\mathbf{2})$	$(5;\mathbf{1})$
ax	0	5	10	15	20	25
Division euclidienne de ax par $p = 6$	$0 \times 6 + \mathbf{0}$	$0 \times 6 + \mathbf{5}$	$1 \times 6 + \mathbf{4}$	$2 \times 6 + \mathbf{3}$	$3 \times 6 + \mathbf{2}$	$4 \times 6 + \mathbf{1}$

Pour toutes les ombres du satin, le reste dans la division euclidienne de ax par p est bien égal à l'ordonnée de chaque ombre.

3. Sur l'annexe 2, représenter le satin régulier de taille 5 et de décochement 2 .
4. **Satin régulier de taille 2 :**
   Quelle est la seule valeur possible de a pour que le satin de taille 2 et de décochement a soit régulier ? Le représenter sur la copie.
5. **Satin régulier de taille 3 :**
   a) On donne, ci-dessous, la représentation d'un satin régulier de taille 3 et de décochement a. Préciser le décochement a associé.



   b) Donner une autre représentation d'un satin régulier de taille 3 et préciser le décochement associé.
6. Parmi les satins de taille 4 (trouvés à la partie 1, question 1), combien sont réguliers ? Pour chacun d'eux, préciser le décochement associé.

Définition 4 : Soient $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$.
On dit que m et n sont **premiers entre eux** si leur seul diviseur commun est 1.

Propriété 2 (admise) : Le satin de taille p et de décochement a est régulier si, et seulement si, a et p sont premiers entre eux (avec $0 < a < p$).

7. Combien de satins réguliers de taille 5 peut-on créer ? Justifier en utilisant la propriété 2 ci-dessus. Il n'est pas demandé de les représenter.

Partie 3 : satin carré de taille p et de décochement a

Définition 5 : Un satin régulier de taille p et de décochement a est dit **carré** si, et seulement si, $a^2 + 1$ est divisible par p.

8. a) Vérifier que le satin régulier de taille 13 et de décochement 5 est carré.
   b) Même question pour le satin régulier de taille 25 et de décochement 7.
9. Donner la taille et le décochement d'un satin régulier non carré.
10. Soit un satin régulier de taille 5 et de décochement a.
    a) Donner les valeurs de a possibles pour que le satin régulier de taille 5 et de décochement a soit carré.
    b) Même question pour un satin régulier de taille 10.

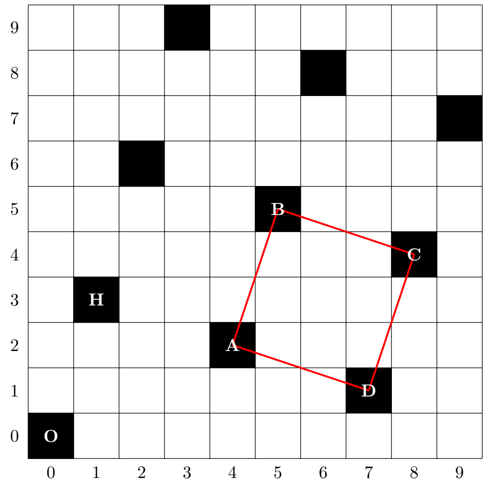
Définition 6 : Soient A et B deux ombres d'un satin de taille p.
Soient x_A, y_A, x_B et y_B, quatre **entiers naturels** compris entre 0 et $p-1$ tels que, $(x_A ; y_A)$ soient les coordonnées de A et $(x_B ; y_B)$ soient les coordonnées de B.
La **distance** entre les ombres A et B est :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Définition 7 : Soit d la plus petite distance entre deux ombres.
Un carré de côté d, dont les sommets sont les centres des ombres, est appelé **carré de taille minimale.**

Propriété 3 (admise) : Un satin carré contient au moins un carré de taille minimale.

Exemple 3 : Représentation du satin carré de taille 10 et de décochement 3.
$ABCD$ est un **carré de taille minimale.**



11. En utilisant la représentation du satin carré de l'exemple 3, calculer la distance entre les ombres A et B.

Partie 4 : une propriété des satins carrés de taille p

On considère un satin carré de taille p et de décochement a.

Soient A, B, C et D quatre ombres telles que $ABCD$ forme un **carré de taille minimale**.

On note $\mathcal{A}_{satin}$ l'aire de la surface du satin et on note $\mathcal{A}_{ABCD}$ l'aire du carré $ABCD$.

Propriété 4 (admise) : $$\mathcal{A}_{satin} = p \times \mathcal{A}_{ABCD}$$

12. a) Montrer que : $\mathcal{A}_{ABCD} = p$.
    b) En déduire que $AB = \sqrt{p}$.
13. On note O l'ombre de coordonnées $(0;0)$.
    Soient x et y deux **entiers naturels** compris entre 0 et $p-1$.
    Il existe une ombre H de coordonnées $(x;y)$ telle que $OH = AB$.
    On note I la case blanche de coordonnées $(x;0)$.

    En utilisant le théorème de Pythagore dans un triangle bien choisi, montrer que p peut s'écrire comme la somme de deux carrés d'entiers.

Exercice 2

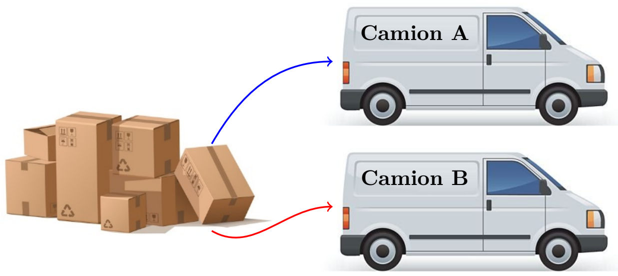
Un déménagement équilibré ... ou pas !

Dans tout ce qui suit, N désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Un déménageur doit transporter N cartons à répartir dans deux camions, notés A et B, de façon à équilibrer au mieux le volume des cartons dans chacun des deux camions.

On admettra que les deux camions sont suffisamment grands pour pouvoir contenir autant de cartons que nécessaire.

On suppose qu'aucun camion ne part à vide et que l'ordre de rangement des cartons dans un camion n'a pas d'importance.



Dans tout ce qui suit, les volumes des cartons sont des entiers naturels strictement positifs et on note :

- Pour tout entier i compris entre 1 et N, V_i le volume du carton i.
- $E = \{V_1; V_2; \ldots; V_N\}$ l'ensemble des volumes des N cartons.
- $S(E)$ le volume total des cartons, ainsi $S(E) = V_1 + V_2 + \cdots + V_N$.
- $S(A)$ le volume total des cartons rangés dans le camion A.
- $S(B)$ le volume total des cartons rangés dans le camion B.

On a donc $S(E) = S(A) + S(B)$. On suppose de plus que $S(A) \geqslant S(B)$.
La différence de volumes entre les deux camions $S(A) - S(B)$ est appelée **écart de répartition**.

Exemple : répartitions des volumes entre les camions A et B

Volumes E	**Répartitions dans** A	**Répartitions dans** B	**Écart** $S(A) - S(B)$
$\{1;3\}$	$\{3\}$	$\{1\}$	$3-1=2$
$\{1;2;3\}$	$\{2;3\}$	$\{1\}$	$5-1=4$
	$\{1;3\}$	$\{2\}$	$4-2=2$
	$\{3\}$	$\{1;2\}$	$3-3=0$
	$\{1;2\}$	$\{3\}$	$3-3=0$
$\{1;1;3\}$	$\{1;3\}$	$\{1\}$	$4-1=3$
	$\{3\}$	$\{1;1\}$	$3-2=1$

Pour un ensemble de volumes E donné, on notera $\Delta(E)$ **le plus petit écart de répartition possible**.
Les répartitions dans A et B associées à $\Delta(E)$ seront alors dites **optimales**.

Ainsi, en reprenant les exemples précédents, on a :

Si $E = \{1;3\}$, la répartition optimale est $\{3\} \mid \{1\}$ et $\Delta(E) = 2$.

Si $E = \{1;2;3\}$, la répartition optimale est $\{3\} \mid \{1;2\}$ ou $\{1;2\} \mid \{3\}$ et $\Delta(E) = 0$.

Si $E = \{1;1;3\}$, la répartition optimale est $\{3\} \mid \{1;1\}$ et $\Delta(E) = 1$.

Partie 1 : premiers exemples et premières propriétés

1. Pour chacun des ensembles E ci-dessous, préciser la valeur de $\Delta(E)$ ainsi qu'une répartition optimale correspondante. Aucune justification n'est demandée.
   a) $E = \{2; 4; 8\}$
   b) $E = \{1; 3; 5\}$
   c) $E = \{5; 7; 9\}$
   d) $E = \{5; 6; 7; 8\}$

Soit N est un entier naturel. On rappelle que :

- N est **pair** s'il s'écrit sous la forme $2k$ où k est un entier naturel,
- N est **impair** s'il s'écrit sous la forme $2k + 1$ où k est un entier naturel.

2. Soit E un ensemble donné de volumes.
   a) i. Montrer que : « Si $\Delta(E) = 0$ alors $S(E)$ est paire ».
      ii. La réciproque est-elle vraie ? Justifier.
   b) i. Montrer que : « Si $\Delta(E) = 1$ alors $S(E)$ est impaire ».
      ii. La réciproque est-elle vraie ? Justifier.

Partie 2 : répartition optimale pour les entiers naturels de 1 à N

Dans cette partie, on suppose que les volumes des N cartons sont les entiers naturels compris entre 1 et N, et on note $E_N = \{1; 2; 3; \dots; N\}$ l'ensemble de ces N volumes.

3. Déterminer les valeurs de $\Delta(E_2), \Delta(E_3), \Delta(E_4), \Delta(E_5)$ ainsi qu'une répartition optimale dans chaque cas. Aucune justification n'est demandée.

4. Pour tout N entier naturel supérieur ou égal à 2, on note $F_N = \{N + 1; N + 2; N + 3; N + 4\}$.
   Justifier que $\Delta(F_N) = 0$.

Pour les questions qui suivent, on admettra que $E_{N+4} = E_N \cup F_N$.

5. Justifier que : $0 \leqslant \Delta(E_{N+4}) \leqslant \Delta(E_N)$.

6. a) Montrer que si $\Delta(E_N) = 0$ alors $\Delta(E_{N+4}) = 0$.
   b) Déduire, en justifiant, que si $N = 3 + 4k$ ou $N = 4 + 4k$ avec k entier naturel, alors $\Delta(E_N) = 0$.

7. a) Montrer que $S(E_{N+4}) = S(E_N) + 4N + 10$.
   b) En utilisant les questions 2.a)i. et 2.b)i. de la partie 1, montrer que si $\Delta(E_N) = 1$ alors $\Delta(E_{N+4}) \neq 0$.
   c) Déduire que si $\Delta(E_N) = 1$ alors $\Delta(E_{N+4}) = 1$.
   d) Déduire, en justifiant, que si $N = 2 + 4k$ ou $N = 5 + 4k$ avec k entier naturel, alors $\Delta(E_N) = 1$.

8. En utilisant les questions 6.b) et 7.d), préciser les valeurs de $\Delta(E_{2025}), \Delta(E_{2026}), \Delta(E_{2027})$ et $\Delta(E_{2028})$.
   Les répartitions optimales ne sont pas demandées.

9. Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 2.
   Décrire une méthode de répartition permettant d'obtenir une répartition optimale de E_N.

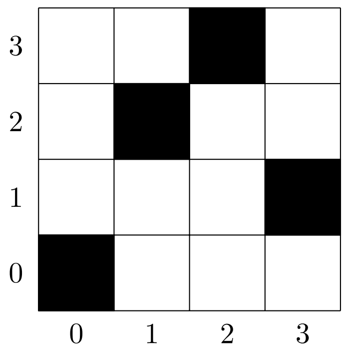
Annexes de l'exercice «Tissages mathématiques».

À rendre avec la copie.

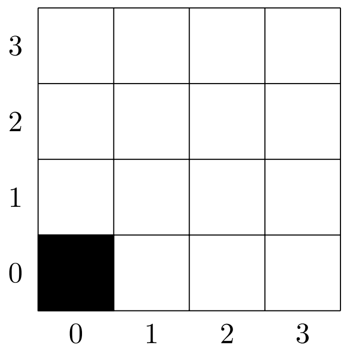
Annexe 1

Partie 1 - Question 1 :

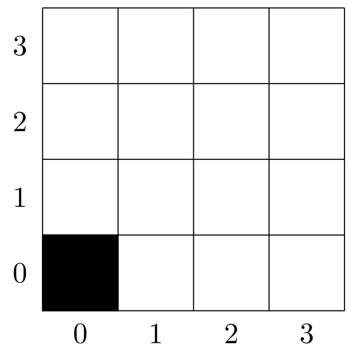
Satin A



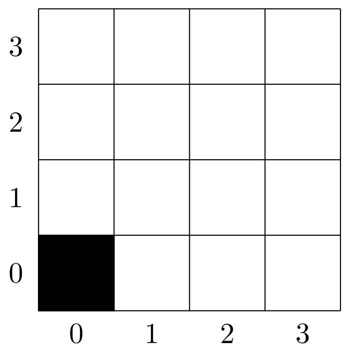
Satin B



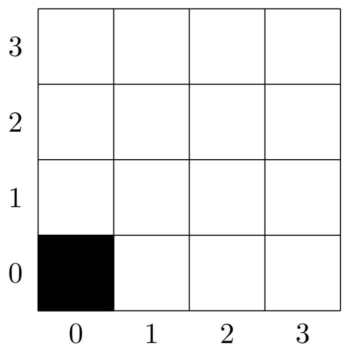
Satin C



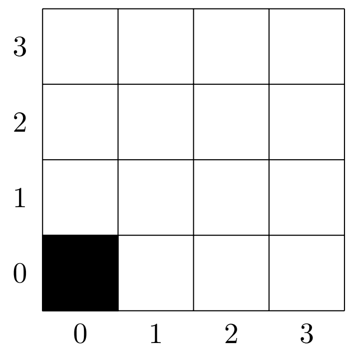
Satin D



Satin E



Satin F



Annexe 2

Partie 2 - Question 3 :