MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques 2026

ACADÉMIE DE NICE
Liberté
Égalité
Fraternité

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune.

Les énoncés des deux parties sont donc séparés, distribués puis ramassés à des moments différents.

Une des deux parties de l'épreuve est constituée des exercices nationaux, l'autre des exercices académiques. À l'issue de la première partie, les énoncés et les copies sont ramassées et une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie à l'issue de laquelle les copies et les énoncés sont également ramassés.

Exercices académiques

Résolution en équipe

Candidats de la voie générale N'ayant PAS choisi l'enseignement de spécialité mathématiques, et TOUS ceux de la voie technologique (STI2D, STL, ST2S, STMG, STHR, STD2A, STAV, S2TMD, etc.)

Déroulement de l'épreuve constituée des exercices académiques (2 heures) :

Il n'est pas nécessaire de résoudre toutes les questions des deux exercices pour obtenir en fin de compte la note ou une appréciation maximales.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des recherches qu'ils ont pu entreprendre. **Il est également conseillé d'accorder une heure à un premier exercice, puis de passer au deuxième quitte à revenir ensuite au premier.**

Les règles, compas, rapporteurs, équerres et calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

L'énoncé académique comporte 6 pages.

Exercice 1

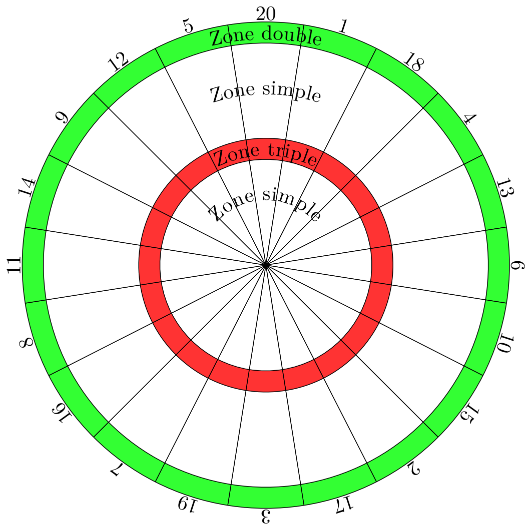
Jeu de fléchettes

Un jeu de fléchettes consiste à effectuer plusieurs lancers successifs d'une seule fléchette sur une cible jusqu'à obtenir exactement le total de 501 points. Pour chaque lancer, les points marqués dépendent de la zone de la cible touchée par la fléchette comme expliqué ci-dessous :

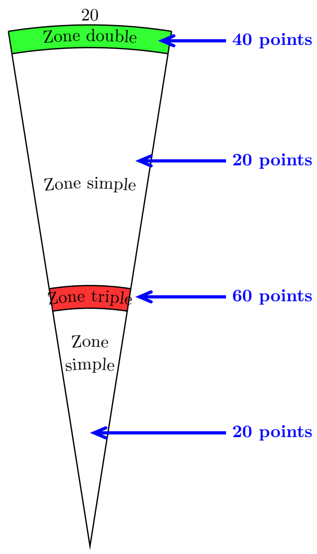
La cible ci-dessous est composée de 4 **zones** et de 20 **secteurs**, numérotés de 1 à 20 comme sur les figures ci-dessous.

- une zone **triple** (en rouge), où les points marqués s'obtiennent en multipliant le numéro du secteur par 3 ;
- une zone **double** (en vert), où les points marqués s'obtiennent en multipliant le numéro du secteur par 2 ;
- deux zones **simples** (zones restantes de la cible, en blanc), où les points correspondent au numéro du secteur.

Secteurs, zones simples, doubles et triples



Exemple : nombre de points du secteur 20



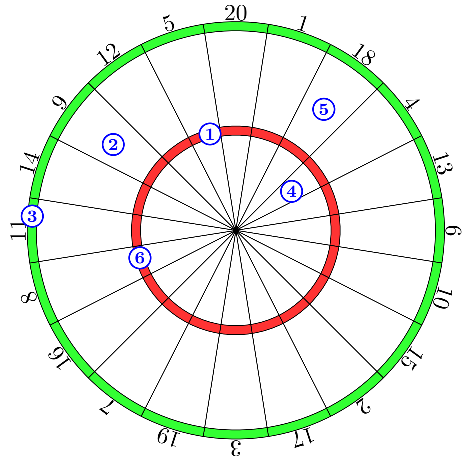
On suppose qu'une fléchette ne peut se planter ni au centre, ni à la frontière entre deux zones ou deux secteurs.

Un exemple

Sur la figure ci-contre six lancers, numérotés de 1 à 6, ont été effectués :

- Le 1er lancer rapporte $3 \times 5 = 15$ points, on parlera de «triple 5» ;
- Le 2e lancer rapporte 9 points ;
- Le 3e lancer rapporte $2 \times 11 = 22$ points, on parlera de «double 11» ;
- Le 4e lancer rapporte 4 points ;
- Le 5e lancer rapporte 18 points ;
- Le 6e lancer rapporte $3 \times 8 = 24$ points, on parlera de «triple 8».

Après ces six lancers, le joueur a donc totalisé :
$15+9+22+4+18+24 = 92$ points, il lui reste donc encore $501-92 = 409$ points à obtenir pour arriver à 501 points.



Règle du dernier lancer pour faire 501
Pour arriver à 501 points (et donc gagner) lors du dernier lancer la flèchette doit être plantée dans la zone double.

Par exemple, si le joueur a obtenu 489 points, pour obtenir les 12 points manquants en un dernier lancer, il doit planter sa fléchette dans le secteur 6 dans la zone double (faire un «double 6»).

Partie 1 : stratégie pour un Nine Darters

1. Justifier que pour obtenir 501 points, le joueur doit effectuer neuf lancers au minimum.

Le **Nine Darters**, véritable tour de force dans le monde des fléchettes, demeure l'exploit ultime.
Il s'agit de marquer 501 points en seulement neuf lancers.

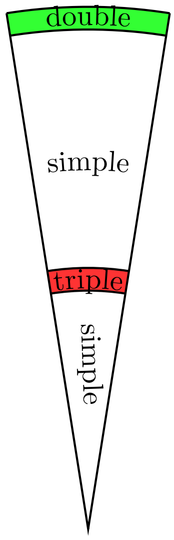
Il existe des centaines de manières de totaliser 501 points avec seulement neuf lancers. Cependant, dans les pratiques courantes, le joueur commence souvent par effectuer six «triple 20» pour accumuler 360 points.

Une fois cet exploit réalisé, il lui reste 141 points à marquer avec les trois derniers lancers.

Dans la suite de cette partie 1, on considère un joueur qui doit marquer 141 points pour gagner.

2. Avec deux «triple 20» et un «triple 7», est-il possible de gagner ?
3. Donner une façon de réaliser 141 points sur les trois derniers lancers.
4. Justifier qu'il est nécessaire de faire deux triples, dont un triple impair pour gagner.
5. Justifier qu'il est nécessaire que chacun des deux triples soit au moins égal à 15.
6. Justifier, sans tenir compte de l'ordre des deux premiers lancers, qu'il y a six façons de gagner et les citer.

Partie 2 : calcul de probabilités



Dans cette partie, on admettra les résultats suivants qui sont valables pour chacun des vingt secteurs :

- l'aire correspondant à sa zone triple est 110π mm^2 ;
- l'aire correspondant à sa zone double est 225π mm^2 ;
- l'aire correspondant à ses deux zones simples est 2310π mm^2 ;

On considère maintenant un joueur débutant. On suppose alors que le joueur atteint systématiquement un secteur de la cible avec sa fléchette.
La probabilité d'atteindre une zone donnée de ce secteur est : $\dfrac{\text{aire de la zone}}{\text{aire de la cible}}$.

Le but de cette partie est de calculer la probabilité pour ce joueur débutant de réaliser un Nine Darters en commençant par six «triple 20».

7. Montrer que, dans ces conditions, la probabilité de faire un «triple 20» est $\dfrac{11}{5290}$.

On prendra, pour la suite $0,002$ comme valeur approchée au millième de $\dfrac{11}{5290}$.

8. Calculer la probabilité d'effectuer six «triple 20» successifs comme expliqué dans la partie 1.
9. Montrer que la probabilité de réaliser un «double 20» est égale à $\dfrac{9}{2116}$.

Dans la suite de l'exercice, pour effectuer des calculs, le candidat utilisera la valeur approchée au millième de cette probabilité.

Par la suite les valeurs approchées des probabilités seront données en utilisant leur écriture scientifique.

10. Calculer la probabilité d'enchaîner un «triple 20», puis un «triple 19», pour finir par un «double 12».
11. Calculer la probabilité de réaliser 141 points en lançant trois fléchettes.
12. Calculer la probabilité de réaliser, dans ces conditions, un Nine Darters (en commençant par six «triple 20»).

Exercice 2

Des billes et des codes

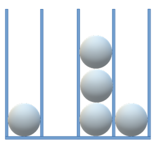
Soient n et p deux entiers naturels non nuls. Un jeu consiste à disposer n billes toutes identiques dans une boîte formée de p tubes tous identiques alignés verticalement. Les billes sont empilées les unes au-dessus des autres dans les tubes et la boîte est assez haute pour que toutes les billes puissent être disposées dans un seul tube.
Avec une vue de face, chaque tube est assimilé à une colonne et on remplit la boîte de gauche à droite.
Les différentes colonnes sont délimitées par des cloisons verticales schématisées en bleu.
Voici un exemple de disposition pour trois colonnes avec quatre billes, donc $p = 3$ et $n = 4$:

On observe donc une bille dans la première colonne, trois billes dans la deuxième et aucune bille dans la troisième colonne.

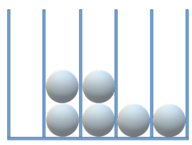
Partie 1 : modélisation du jeu

Codage de la disposition des billes
Chaque disposition des billes dans la boîte est codée par une série de symboles.
Deux symboles sont utilisés : soit ○ représentant une bille, soit ⊠ représentant une cloison.
Ainsi pour une boîte de p colonnes, on crée un code contenant $p + 1$ symboles ⊠ .
Le premier symbole et le dernier symbole sont nécessairement un ⊠.

Voici deux exemples de disposition avec leur code correspondant :



code : ⊠○⊠⊠○○○⊠○⊠



code : ⊠⊠○○⊠○○⊠○⊠○⊠

1. a) Comment reconnaître dans un code le fait qu'il y ait au moins une colonne vide ?
   b) Sur l'annexe 1.1, pour chaque disposition des billes, indiquer, au-dessous, le code correspondant.
   c) Sur l'annexe 1.2, pour chaque code, dessiner la disposition des billes correspondante.

Définition des combinaisons
Soient k et ℓ deux entiers naturels tels que $k \geqslant 0$, $\ell \geqslant 1$ et $\ell \geqslant k$. Avec deux lettres a et b, on forme un mot comportant ℓ lettres au total avec k fois la lettre b.
Par exemple, pour $\ell = 5$ et $k = 2$, on a dix mots au total dont les mots *bbaaa*, *babaa*, *abaab*, *aabba*, *abaab*, ...
Le nombre de mots que l'on peut former est appelé **combinaison de k parmi** ℓ et est noté $C(\ell, k)$.
On admet la formule suivante qui permet de calculer ce nombre pour $k \geqslant 1$:

$$C(\ell, k) = \frac{\ell \times (\ell - 1) \times (\ell - 2) \times \cdots \times (\ell - k + 1)}{k \times (k - 1) \times (k - 2) \times \cdots \times 1}$$

De plus pour $k = 0$, on pose $C(\ell, 0) = 1$.
On remarquera qu'il y a le même nombre de facteurs au numérateur et au dénominateur.
Par exemple, $C(5, 2) = \dfrac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$ et $C(6, 3) = \dfrac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$.

2. Calcul du nombre de codes

Notation du nombre de dispositions
Soient $p \geqslant 1$ et $n \geqslant 1$. Pour une boîte de p colonnes et pour n billes, on note $N(n, p)$ le nombre de dispositions possibles des billes dans la boîte.

a) Sur l'annexe 2.1, dessiner toutes les dispositions possibles dans le cas $n = 2$ et $p = 3$.
En déduire la valeur de $N(2, 3)$.

b) Sur l'annexe 2.2, dessiner toutes les dispositions possibles dans le cas $n = 2$ et $p = 4$.
En déduire la valeur de $N(2, 4)$.

3. a) Justifier que, pour tout $p \geqslant 1$ et $n \geqslant 1$, $N(n, p) = C(n + p - 1, p - 1)$.

b) On considère une bille de la boîte.

i. Justifier que le nombre de dispositions, dans le cas où cette bille est seule dans sa colonne, est égal à $N(n - 1, p - 1)$.

ii. Justifier que le nombre de dispositions, dans le cas où cette bille n'est pas seule dans sa colonne, est égal à $N(n - 1, p)$.

iii. En déduire une relation entre $N(n, p)$, $N(n - 1, p)$ et $N(n - 1, p - 1)$.

Partie 2 : étude de certaines dispositions

Soient p et n deux entiers tels que $p \geqslant 1$ et $n \geqslant 1$. On considère une boîte de p colonnes et n billes.

4. On se place dans le cas où seule une des colonnes est remplie.
Justifier que le nombre de dispositions est p.

5. Soit $n \geqslant p$. On se place dans le cas où aucune colonne n'est vide.
Justifier que le nombre de dispositions est $N(n - p, p)$.

6. a) Soit k un entier vérifiant $2 \leqslant k \leqslant p$. On se place dans le cas où toutes les colonnes avant la k-ième colonne sont vides. Justifier que le nombre de dispositions est $N(n, p - k + 1)$.

b) Soit k un entier vérifiant $1 \leqslant k \leqslant p - 1$. On se place dans le cas où toutes les colonnes après la k-ième colonne sont vides. Déterminer le nombre de dispositions.

7. Soit $2 \leqslant p \leqslant n$. On se place dans le cas où seules deux colonnes sont remplies.

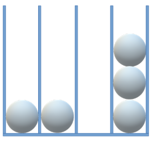
a) On considère l'équation $n_1 + n_2 = n$ d'inconnues n_1, n_2 deux entiers naturels non nuls.
Justifier que cette équation possède $n - 1$ solutions.

b) En déduire que le nombre de dispositions est $\dfrac{1}{2}p(p - 1)(n - 1)$.

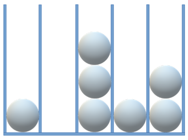
Annexes de l'exercice «Des billes et des codes».

À rendre avec la copie.

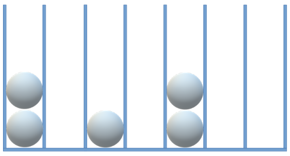
Annexe 1.1



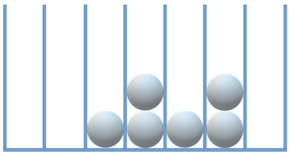
code :



code :



code :



code :

Annexe 1.2

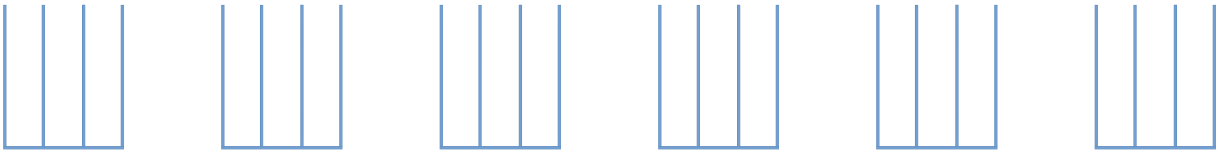
code :
⊠○⊠○⊠○○○⊠⊠⊠

code :
⊠○⊠⊠○⊠○⊠⊠○○⊠

code :
⊠○○○⊠○○○○⊠○⊠⊠

code :
⊠○○○⊠⊠○⊠○⊠○⊠⊠

Annexe 2.1



Annexe 2.2