MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
Liberté Égalité Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques 2026

ACADÉMIE DE NICE
Liberté Égalité Fraternité

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune.

Les énoncés des deux parties sont donc séparés, distribués puis ramassés à des moments différents.

Une des deux parties de l'épreuve est constituée des exercices nationaux, l'autre des exercices académiques. À l'issue de la première partie, les énoncés et les copies sont ramassées et une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie à l'issue de laquelle les copies et les énoncés sont également ramassés.

Exercices académiques

Résolution individuelle

Candidats de la voie générale N'ayant PAS choisi l'enseignement de spécialité mathématiques, et TOUS ceux de la voie technologique (STI2D, STL, ST2S, STMG, STHR, STD2A, STAV, S2TMD, etc.)

Déroulement de l'épreuve constituée des exercices académiques (2 heures) :

Il n'est pas nécessaire de résoudre toutes les questions des deux exercices pour obtenir en fin de compte la note ou une appréciation maximales.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des recherches qu'ils ont pu entreprendre. **Il est également conseillé d'accorder une heure à un premier exercice, puis de passer au deuxième quitte à revenir ensuite au premier.**

Les règles, compas, rapporteurs, équerres et calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

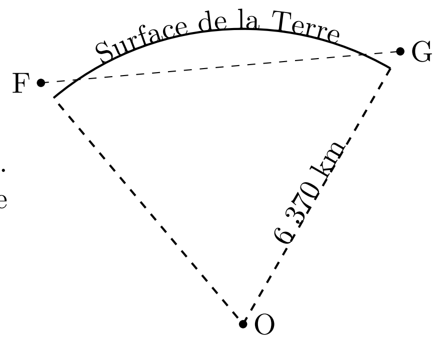
L'énoncé académique comporte 6 pages.

Exercice 1

Au-delà de l'horizon

La courbure terrestre limite la vision lointaine sur la Terre.

Par exemple, sur la figure ci-contre, du point F on ne peut pas voir le point G. Dans cet exercice, la Terre est assimilée à une sphère de centre O et de rayon 6370 km.



Partie 1 : points visibles et étude de quelques exemples

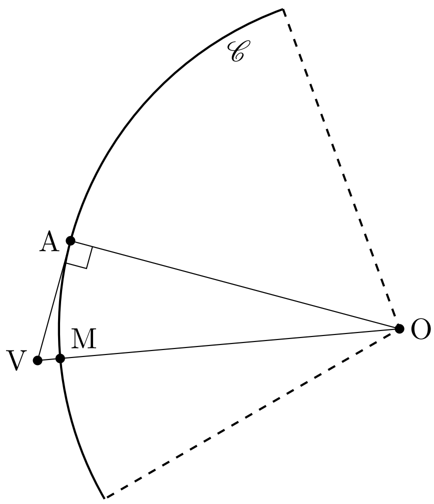
Sur la figure 1, en annexe, on a représenté une partie de la Terre vue en coupe, faisant apparaître une montagne. On a aussi placé les points V, G, I et H.

1. Du point V peut-on voir le point G ? le point I ? le point H ?

   On pourra justifier la réponse à l'aide de tracés sur la figure 1 donnée en annexe et à rendre avec la copie.

Pour la suite de l'exercice, on supposera qu'aucune montagne ne peut limiter l'observation.

- La figure ci-contre représente une partie d'une vue en coupe de la Terre, par un arc du cercle $\mathscr{C}$ de centre O, et de rayon $R = 6370$ km.
- Le point V représente l'emplacement des yeux d'un observateur.
- M est le point d'intersection du segment $[OV]$ et du cercle $\mathscr{C}$.
- On considère que le point M se situe au niveau de la mer, la longueur VM représente alors l'altitude à laquelle se trouvent les yeux de l'observateur.
- A est un point de $\mathscr{C}$ tel que (AV) et (OA) sont perpendiculaires, la droite (AV) est ainsi la tangente en A au cercle $\mathscr{C}$.



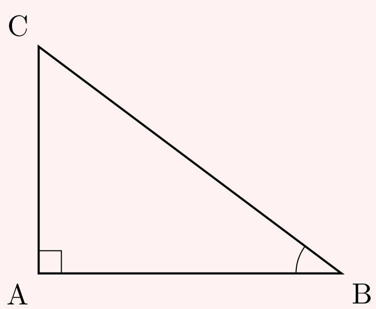
Définitions : A sera appelé **point d'horizon** de V. La longueur AV sera appelée **portée visuelle**.

Rappel : Dans le triangle ABC rectangle en A on a :

$$\cos(\widehat{ABC}) = \frac{AB}{BC}$$

$$\sin(\widehat{ABC}) = \frac{AC}{BC}$$

$$\tan(\widehat{ABC}) = \frac{AC}{AB}$$



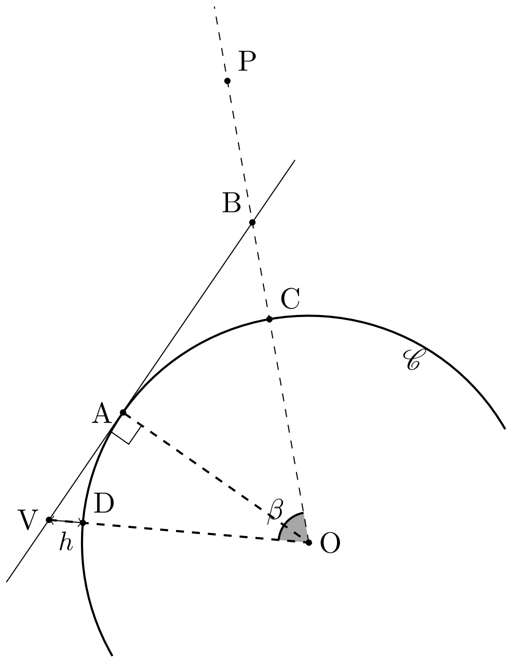
2. Montrer, à l'aide du théorème de Pythagore, que la portée visuelle d'un observateur placé au niveau de la mer et dont les yeux sont situés à 2 m du sol est 5,048 km (valeur arrondie au mètre près).
3. Calculer, à 0,01° près, la mesure de l'angle $\widehat{OVA}$.
4. À quelle altitude h doivent être situés les yeux d'un observateur pour avoir une portée visuelle théorique de 100 km ?
5. Peut-on affirmer que « Si h est l'altitude pour une portée visuelle de 100 km, alors $2h$ est l'altitude pour une portée visuelle de 200 km » ? Justifier la réponse.
6. Un observateur habite dans une maison, située à 100 m d'altitude, sur les hauteurs de Nice avec vue dégagée sur la mer. Ainsi $VM = 100$ m. Peut-il voir un bateau naviguant à 30 km ?

Partie 2 : en théorie, peut-on voir la Corse du village d'Èze ?

- h représente l'altitude à laquelle se trouve l'observateur.
- R est le rayon de la Terre.
- β est la mesure d'un angle.
- C est le point de l'arc de cercle tel que $\widehat{COV} = \beta$.
- B est l'intersection de (VA) et de (OC) (donc B est le point de $[OC]$ visible de V dont l'altitude est la moins élevée).
- BC est l'altitude du point B.

Ainsi :

- Les points du segment $[BC]$ ne sont pas visibles de V.
- Les points de la demi-droite $[BP)$ sont visibles de V.



7. Exprimer $\cos(\widehat{AOV})$ en fonction de R et de h.
8. Exprimer $\widehat{AOB}$ en fonction de $\widehat{AOV}$ et de β.
9. Le point V est situé à 1000 m d'altitude. Sachant que $\beta = 2°$, on cherche à déterminer l'altitude de B.
   a) Calculer, à 0,01° près, la mesure de l'angle $\widehat{AOV}$.
   b) En déduire, à 0,01° près, la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$.
   c) En déduire l'altitude du point B.
10. Dans cette question, $\beta =$1,8°. Du village d'Èze (point V) situé à 400 m d'altitude, peut-on voir le point B (situé en Corse) à 700 m d'altitude ? Justifier la réponse.

Exercice 2

Une figure riche

On dispose d'un nombre illimité de pièces d'un euro, identiques, assimilées à des disques.
Soit n un entier naturel non nul.
On va alors construire une figure, que nous nommerons **figure riche**, de la façon suivante :

- nous appellerons **premier niveau**, la disposition de n pièces d'un euro de façon à ce que :
  - ▷ les centres des n pièces soient alignés.
  - ▷ deux pièces voisines soient tangentes.
- nous appellerons **deuxième niveau**, la disposition de $n-1$ pièces d'un euro suivant le même procédé que pour le premier niveau et de telle sorte que chacune des pièces de ce deuxième niveau soient tangentes à deux pièces du premier niveau.
- et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ne puisse plus placer qu'une seule pièce sur ce que nous appellerons **le dernier niveau**.

Exemple d'une figure riche avec $n = 4$:

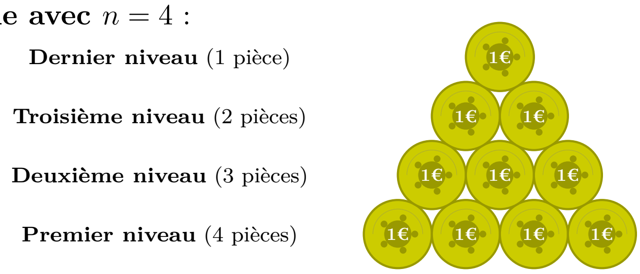


FIGURE 1 – Une figure riche avec un premier niveau de 4 pièces

On appelle **espace vide** une zone délimitée par trois pièces tangentes.

Par exemple, sur la figure 1, la figure riche comporte 9 espaces vides.

Partie 1 : nombre de pièces et d'espaces vides d'une figure riche

La somme des n premiers entiers naturels est donnée par $1 + 2 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

1. Recopier et compléter le tableau ci-dessous, en indiquant le nombre de pièces et d'espaces vides.

Nombre de pièces au premier niveau	2	3	4	5
Nombre de pièces formant la figure riche	3		10	
Nombre d'espaces vides entre les pièces	1		9	

2. De combien de niveaux est formée une figure riche dont le premier niveau comporte n pièces ?
3. Au k^{e} niveau, pour un entier $1 \leqslant k \leqslant n$, combien y a-t-il de pièces ?
4. Exprimer, en fonction de n, le nombre de pièces formant une figure riche avec un premier niveau de n pièces.
5. L'une des formules suivantes permet de calculer le nombre d'espaces vides dans une figure riche avec un premier niveau de n pièces. En s'appuyant sur le tableau rempli à la question 1, recopier sur la copie celle qui founit le nombre d'espaces vides. Aucune justification n'est attendue.

- $4n - 7$
- 4^{n-2}
- $(n-1)^2$
- $n^3 - 8n^2 + 24n - 23$

Partie 2 : aire d'un espace vide

On s'intéresse à l'aire de l'espace vide situé entre 3 pièces tangentes. Pour cela, on considère le schéma ci-dessous avec A, B et C les centres des trois pièces de rayon R. Le triangle ABC est ainsi un triangle équilatéral de côté $2R$ et I est le milieu du côté [AC], H le milieu du côté $[AB]$.

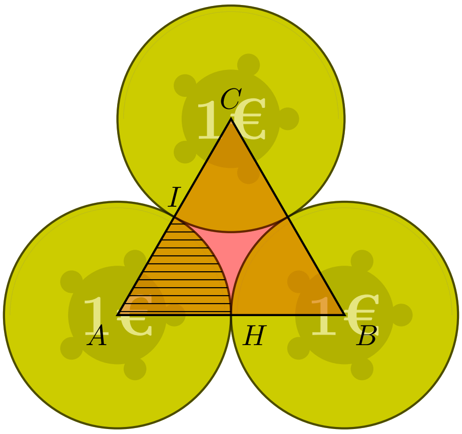


FIGURE 2 – Un espace vide situé entre trois pièces tangentes

L'aire d'un triangle est donnée par $\dfrac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$.
L'aire d'une pièce de rayon R est donnée par la formule : $\mathcal{A}_{\text{pièce}} = \pi R^2$.

6. En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle ACH, montrer que la hauteur HC vérifie
$$HC = \sqrt{3} \times R.$$
7. En déduire l'aire $\mathcal{A}_{ABC}$ du triangle équilateral ABC en fonction de R.
8. Le secteur AIH (hachuré sur la figure 2) est l'intersection du disque de centre A et du triangle ABC.

   Justifier que l'aire de ce secteur est : $\mathcal{A} = \dfrac{\pi R^2}{6}$.
9. En déduire l'aire de l'espace vide en fonction de R.

Partie 3 : espace occupé

On considère une figure riche avec un premier niveau de n pièces.

Notons :

- $\mathcal{A}_d$ l'aire de la surface occupée par l'ensemble des pièces ;
- $\mathcal{A}_e$ l'aire de la surface occupée par la totalité des espaces vides entre les pièces ;
- $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_d + \mathcal{A}_e$ l'aire totale de la figure riche.

Soit la proportion $p = \dfrac{\mathcal{A}_d}{\mathcal{A}_t}$.

10. Justifier que :
$$\mathcal{A}_d = \frac{n(n+1)\pi R^2}{2}.$$
11. En s'appuyant sur les questions 5 et 10, justifier que :
$$\mathcal{A}_e = (n-1)^2 R^2 \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right).$$
12. La proportion p dépend-elle de R ? Justifier.

Annexe de l'exercice «Au-delà de l'horizon»

À rendre avec la copie

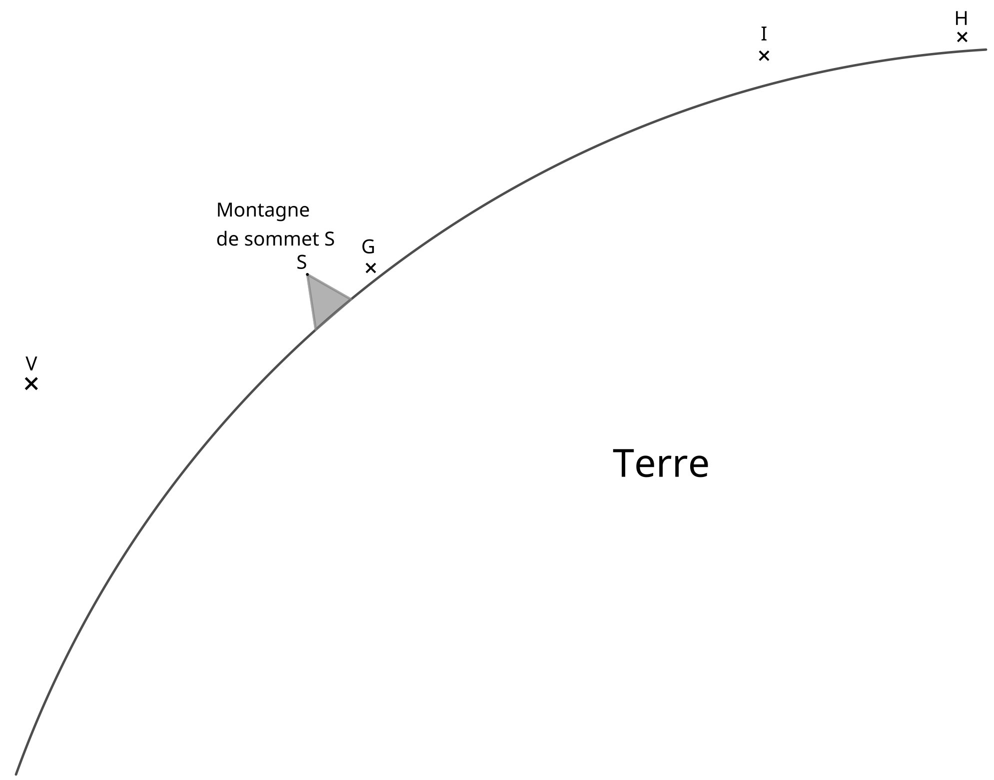


Figure 1 à compléter