MESURES ET INCERTITUDES EN SCIENCES PHYSIQUES

Mise en œuvre des principes généraux auprès d'élèves de lycée

Laure FANTASIA – Académie de Nice

Lors de la mise en place des nouveaux programmes, la question des mesures et de leurs incertitudes s'est imposée avec encore plus de force que dans les années précédentes. Les questions des enseignants de sciences physiques sont nombreuses, souvent parce que la littérature sur ce sujet fait appel à un lourd formalisme mathématique, et que le lien avec les situations auxquelles nous sommes confrontés au quotidien dans nos classes de lycée est bien difficile à faire.

Pour un physicien-chimiste, le document de référence que l'on trouve à la source des publications sur ce sujet est « Evaluation des données de mesure – Guide pour l'expression de l'incertitude de mesure » publié par le Bureau International des Poids et Mesures en 2008, régulièrement revalidé depuis. Le travail présenté ici a consisté à relire ce guide pour en reformuler les principes, dans le cadre de l'enseignement des sciences physiques au lycée.

L'accessibilité des notions présentées et la simplicité de leur mise en œuvre ont été un souci constant. Toute démarche présentée ici a été validée après avoir été utilisée par mes élèves en classe. Je remercie mes collègues du lycée Paul Langevin, où j'enseigne, pour leurs questions qui m'ont forcée régulièrement à approfondir ma réflexion, et pour les données issues de leurs travaux pratiques qui sont venues compléter les miennes.

La première partie de ce document, intitulée « Mise en œuvre au lycée », est à destination des enseignants. Elle présente, sur des cas concrets testés en classe, les notions qui font partie du programme, pour chaque niveau de la seconde à la terminale spécialité.

Les « Fiches pratiques à destination des élèves » de la deuxième partie permettent aux élèves d'être autonomes sur les outils à utiliser dans le cadre des mesures et incertitudes.

Dans la troisième partie, « Pour aller plus loin », les notions abordées dans la première partie sont reprises et approfondies. Cette partie correspond à une relecture et une réappropriation du document de référence « Evaluation des données de mesure – Guide pour l'expression de l'incertitude de mesure », tout en cherchant à répondre aux questions fréquemment posées par les enseignants.

Enfin, la dernière partie « Annexes » présente les données directement issues des expérimentations des élèves, ainsi que leur exploitation dans des contextes variés.

Ce travail n'a pas été conçu pour être lu de la première à la dernière page. Au contraire, en fonction des besoins de chacun, on peut l'aborder par n'importe laquelle de ses parties.

SOMMAIRE

Bibliographie

B.O. spécial n°1 du 22 janvier 2019 et n°8 du 25 juillet 2019

Bureau International des Poids et Mesures – BIMP ; Evaluation des données de mesure – Guide pour l'expression de l'incertitude de mesure ; JCGM 100 : 2008 ; GUM 1995 avec des corrections mineures
https://www.bipm.org/utils/common/documents/jcgm/JCGM_100_2008_F.pdf

Documents du GRIESP sur les Mesures et Incertitudes, téléchargeables à l'adresse :
https://eduscol.education.fr/cid129214/recherche-et-innovation-en-physique-chimie.html#lien1

I. MISE EN ŒUVRE AU LYCEE

L'objectif de cette première partie, à destination des enseignants, est de décrire le plus simplement possible le travail à mettre en œuvre auprès des élèves, de la classe de seconde générale jusqu'en terminale spécialité.

Les exemples présentés sont issus de séances de travaux pratiques **déjà mises en œuvre par les élèves**.

Les notions vues en classe de seconde étant reprises en première et terminale spécialité, il est important de faire une **lecture linéaire de cette partie I**.

1. Les mots clefs du B.O.

Textes de référence : B.O. spécial n°1 du 22 janvier 2019 et n°8 du 25 juillet 2019

<u>En seconde</u>

- Histogramme [(1)], Moyenne, Ecart-type
- Chiffres significatifs
- Incertitude-type (de type A) [(2)]
- Comparaison <u>qualitative</u> entre un résultat et une valeur de référence

(1) à faire aussi avec un tableur

(2) le terme « de type A » n'est employé qu'à partir de la classe de première

<u>En première spécialité :</u>

Aux notions vues en seconde se rajoute :

- Incertitude-type de type B

<u>En terminale spécialité :</u>

Aux notions vues précédemment se rajoutent :

- Langage de programmation (Histogramme, Moyenne, Ecart-type)
- Incertitude-type composée [(3)]
- Comparaison <u>quantitative</u> entre un résultat et une valeur de référence avec l'outil $\frac{|m_{mes}-m_{ref}|}{u(m)}$

(3) la formule étant fournie, ou à l'aide d'un langage de programmation

Remarque importante : le calcul de l'écart relatif $e = \left|\frac{m_{ref}-m_{mes}}{m_{ref}}\right|$ est abandonné.

Le vocabulaire spécifique lié à ces notions est détaillé en partie III.1.

2. A partir de la classe de seconde : Exploiter une série de mesures

Au cours d'un TP, un élève pèse un même objet – un cylindre d'aluminium - sur les huit balances présentes dans la salle. Les balances sont toutes du même modèle. La série des mesures d'un élève est reproduite ci-dessous, dans des conditions proches des conditions de répétabilité [4] :

Balance n°	1	2	3	4	5	6	7	8
Masse (g)	55,47	55,46	55,45	55,43	55,41	55,47	55,47	55,47

(4) *Conditions de répétabilité : même mode opératoire, même observateur, même instrument de mesure utilisé dans les mêmes conditions, même lieu, répétition durant une courte période de temps.*

Remarque : Les conditions de répétabilité ne sont pas respectées ici car l'instrument de mesure n'est pas le même. En effet, dans la durée limitée d'un TP, il n'est jamais envisageable de faire recommencer la même mesure à un élève une dizaine de fois (imaginons un dosage recommencé dix fois…). Il est donc courant dans nos pratiques de collecter les mesures de tous les binômes d'un groupe, et de considérer que les conditions sont « proches » des conditions de répétabilité.

1ère étape : Regrouper les mesures en classes

C'est le professeur qui détermine les classes. Le choix, empirique, est délicat car :

- si les classes sont trop étroites, il y a étalement des données, aucune valeur ne se distingue nettement ;
- si les classes sont trop larges, toutes les données se retrouvent dans une seule classe, l'histogramme n'est pas exploitable.
- on peut utiliser le critère d'un nombre de classes égal à $\sqrt{nombre\ de\ mesures}$

Dans l'exemple proposé, il faut couvrir l'intervalle [55.41-55.47] avec des classes qui couvrent l'intervalle [55.41-55.48[

L'intervalle est $55.48 - 55.41 = 0{,}07$ g

Il y a 8 mesures ; le nombre de classes peut être choisi égal à $\sqrt{8} = 2.8$, soit 3 classes.

La classe est alors de largeur $\frac{0.07}{3} = 0{,}0233\text{g} = 0.03\text{g}$

Le regroupement des données en classes est dans ce cas :

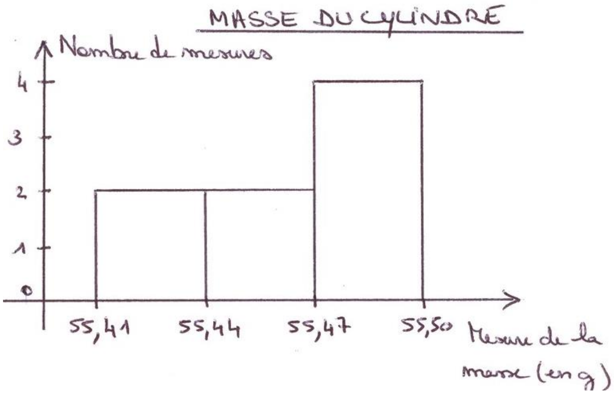
Masse (g)	**Nombre de mesures**
[55.41 - 55.44[	2
[55.44 - 55.47[	2
[55.47 – 55.50[	4

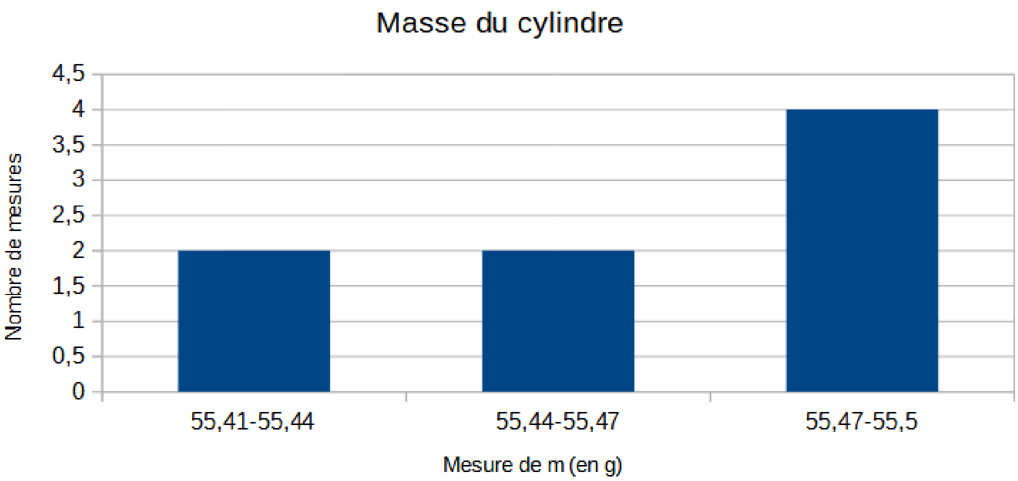
2ème étape : construction de l'histogramme [5]

Dans un premier temps, les élèves peuvent tracer les histogrammes manuellement. Puis, dans un deuxième temps, on leur propose de tracer l'histogramme à l'aide d'un tableau dynamique croisé. Des notices à destination des élèves pour ces deux méthodes sont proposées dans la partie II. *Fiches pratiques à destination des élèves*.

(5) *Nous construisons en réalité des diagrammes à bandes verticales car la **hauteur** des barres est proportionnelle aux effectifs, alors que dans un histogramme la **surface** de la barre est proportionnelle aux effectifs. Mais dans le cas où*

les classes en abscisse sont d'amplitudes égales, alors la hauteur des barres d'un histogramme est aussi proportionnelle aux effectifs.
Dans un diagramme à bandes verticales, un espace peut être visible entre les barres, qui sont disjointes selon le logiciel utilisé.
Nous traçons souvent un hybride histogramme - diagramme à bandes verticales.





On remarque que le tableur utilisé ici disjoint les classes. Il n'affiche pas les classes vides s'il y en a.

<u>3ème étape : calcul de la moyenne et de l'incertitude-type</u>

On utilise les fonctionnalités d'une calculatrice ou d'un tableur.
L'écart-type expérimental étant un calcul intermédiaire, il n'est pas arrondi ; les autres valeurs sont volontairement présentées non arrondies dans un premier temps.

- La moyenne : $\overline{m} = 55{,}45375$ g
- L'écart-type expérimental, appelé écart-type : $s(m)$ = 0,0226385 g (6)
- L'écart-type expérimental de la moyenne, appelé incertitude-type et notée $u(\overline{m})$

$u(\overline{m}) = s(\overline{m}) = \frac{s(m)}{\sqrt{n}}$= 0,0080039 g (7)

(6) *L'écart-type expérimental se calcule :*

- *soit par la formule* $s(m) = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(m_k - \overline{m})^2}$
- *soit en utilisant les fonctionnalités d'un tableur (sous EXCEL la fonction ECARTYPE.STANDARD ; sous CALC la fonction ECARTYPE)*

(7) $u(\overline{m}) = s(\overline{m}) = \frac{s(m)}{\sqrt{n}}$*, avec n nombre de mesures ; cette notion est approfondie dans la partie III.3.2.*

Les notions de moyenne, écart-type expérimental, incertitude-type sont expliquées plus en détail dans la partie III.3.0.

Remarque importante :
La notation avec une majuscule $U(x)$ est réservée à l'incertitude élargie ; cette notion d'**incertitude élargie n'est plus employée**. Pour rappel $U(x) = k.u(x)$ avec k facteur d'élargissement.
La lettre minuscule $u(x)$ est réservée à l'**écart-type**, appelé **incertitude-type**.

4ème étape : les chiffres significatifs

La règle est de ne pas donner un nombre de chiffres significatifs excessif.
L'incertitude-type $u(x)$:

- peut être donnée avec 1 ou 2 chiffres significatifs
- Il est **parfois** approprié d'arrondir au chiffre supérieur (par exemple : $u(\overline{m})$ = 0,0080039 g = 0,0081 g ou 0,009 g), **MAIS le bon sens prévaut** (il paraît plus raisonnable de choisir ici : $u(\overline{m})$ =0 ,008 g)

La valeur x doit être arrondie mathématiquement en accord avec les données **et** avec l'incertitude : le dernier chiffre de x doit occuper la même position que le dernier chiffre de l'incertitude-type $u(x)$.
Par exemple, ici : $\overline{m} = 55{,}45375\ g$ avec $u(\overline{m})$ = 0,008 g devient $\overline{m}$ = 55,45 g avec $u(\overline{m})$ = 0,01 g pour rester en cohérence avec les chiffres significatifs des mesures.

5ème étape : interprétation des résultats

Un élève peut conclure que :

- d'après l'**histogramme**, nous constatons que la valeur la plus nombreuse est comprise dans l'intervalle [55,47g – 55,50g[, soit dans l'intervalle [55,47g - 55,49g].
- d'après **les calculs**, on peut dire que $\overline{m}$ = 55,45 g avec une incertitude-type de 0,01 g.

D'autres exemples d'application en classe de seconde sont proposés dans la partie IV. Annexes.

6ème étape : comparaison avec une valeur de référence

Lorsqu'on dispose d'une **valeur de référence**, on peut comparer le résultat obtenu avec cette valeur de référence. Dans les documents du GRIESP, un critère est donné sous plusieurs formes :

- « Deux valeurs peuvent être compatibles si la différence entre la valeur expérimentale et la valeur de référence est de l'ordre de l'incertitude-type. »
- « La différence […] est très grande devant l'incertitude-type […]. On en conclut que nos résultats expérimentaux ne sont pas compatibles avec la loi testée. »
- m_{mes} et m_{ref} sont compatibles « car la différence […] n'est pas très grande devant l'incertitude-type. »

Par exemple, au cours d'un TP, les élèves ont mesuré la vitesse du son dans l'air. Les données expérimentales - présentées dans la partie IV. Annexes - fournissent le résultat suivant : la vitesse du son dans l'air est mesurée à 345 $m.s^{-1}$ avec une incertitude type de 8 $m.s^{-1}$.

La valeur de référence est de 340 $m.s^{-1}$: un élève peut conclure que la valeur mesurée s'écarte de la valeur de référence de moins d'une incertitude-type (345 – 340 = 5 $m.s^{-1}$). La valeur mesurée et la valeur de référence sont donc compatibles.

Dans un autre TP, les élèves ont mesuré la masse volumique d'un liquide inconnu afin de l'identifier. Il s'agissait de l'éthanol. Les mesures – présentées dans la partie IV. Annexes – fournissent le résultat suivant : la masse volumique est mesurée à 0,799 $g.mL^{-1}$ avec une incertitude type de 0,007 $g.mL^{-1}$.

Un élève peut conclure que : la valeur de référence est de 0,789 g.mL^{-1}; on constate que (0,799 – 0,789 = 0,010 g.mL^{-1}). La différence entre la valeur mesurée et la valeur de référence n'est pas très grande devant l'incertitude-type. La valeur mesurée est donc compatible avec la valeur de référence 0,789 g.mL^{-1} de l'éthanol. Le liquide inconnu est de l'éthanol.

Remarques importantes :

- Le **résultat de la mesure** x doit de préférence être présenté sous la forme « ***x* avec une incertitude-type de *u*(*x*)** ». En effet, la forme $x \pm u(x)$,est à éviter à cause du risque de confusion avec l'incertitude élargie $U(x)$, et elle ne doit pas donner lieu à un encadrement type « intervalle de confiance », qui est à réserver à l'incertitude élargie. *Cf. III.6*.

- Comme indiqué dans les documents du GRIESP « deux valeurs peuvent être compatibles si la différence entre la valeur expérimentale et la valeur de référence est **de l'ordre de** l'incertitude-type. » Les élèves ont appris dès la classe de seconde à reconnaître si deux valeurs sont du même ordre de grandeur. Pour cela ils font le rapport des deux valeurs et mettent le résultat en écriture scientifique $a \times 10^n$. Si $a < 5$, alors les deux valeurs sont séparées de *n* ordres de grandeur et si $a \geq 5$ alors les deux valeurs sont séparées de *n+1* ordres de grandeur.
  Dans cette logique, on peut indiquer aux élèves que deux valeurs sont compatibles si la différence entre la valeur expérimentale et la valeur de référence strictement inférieure à 5 fois l'incertitude-type (même ordre de grandeur).

3. A partir de la classe de première : L'incertitude-type de TYPE B

En classe de première, la seule notion qui se rajoute aux notions déjà abordées en classe de seconde est celle d'incertitude-type de type B. Il s'agit de l'incertitude d'une mesure unique. C*f. III.4.0*.

3.1. Incertitude sur une lecture directe

- Une incertitude est parfois indiquée sur l'appareil de mesure. Par exemple, lors d'un titrage colorimétrique, un élève lit la valeur du volume équivalent V_E = 10,1 mL sur une burette portant l'indication ± 0,05 mL.
  Le fabriquant de la burette ne donne aucune indication : ± 0,05 mL peut représenter l'incertitude élargie $U(x)$, l'incertitude-type $u(x)$, ou autre. S'il s'agit de l'incertitude élargie, le constructeur n'a pas communiqué le facteur d'élargissement qu'il a utilisé. C'est bien pour cela que le BIMP demande l'abandon de l'incertitude élargie $U(x)$ au profit de l'incertitude-type $u(x)$. C*f. III.6*.
  De façon très pragmatique, on pourrait faire utiliser aux élèves **l'indication portée sur l'appareil de mesure comme étant l'incertitude-type**.

- Une précision, ou tolérance, est indiquée sur l'appareil de mesure. Par exemple on lit sur l'appareil une valeur *x*, avec une précision à 2 %. On peut alors considérer que $u(x) = \frac{2}{100} \times x$. *Cf. III. 4.1.*

D'autres situations possibles sont présentées en III.4.1 et III.4.2

3.2. Mesure de longueur

On s'intéresse ici à la mesure d'une longueur à l'aide d'une **règle graduée en millimètres**. Par exemple, au cours d'un TP sur un banc d'optique, les élèves doivent mesurer la taille de l'objet éclairé. La mesure réalisée par un élève est L = 2,2 cm = 22 mm.

Il paraît raisonnable de proposer aux élèves une **incertitude-type $u(L)$ = 0,5 mm** pour la mesure d'une longueur L avec une règle graduée en millimètres. Ce choix est justifié dans la partie III.4.2.

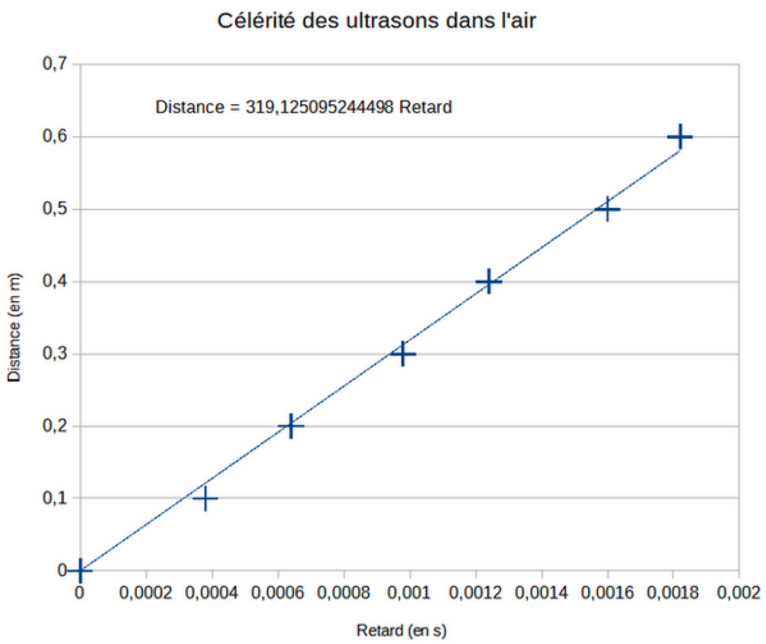
Mais on remarque que l'accord entre L et $u(L)$ donnera la réponse « L = 22 mm avec une incertitude-type $u(L)$ = 1 mm » pour rester en cohérence avec les chiffres significatifs de la mesure. Cependant, si l'incertitude-type doit être utilisée pour un calcul ultérieur, on conservera une valeur non arrondie de l'incertitude-type $u(L)$ = 0,5 mm dans le calcul suivant.

3.3. Exploitation d'une fonction affine

Au cours d'un TP, un élève doit mesurer la vitesse du son dans l'air à partir d'une série de mesures. Pour cela, il place un émetteur et un récepteur ultrasonore face à face. Pour différentes distances entre l'émetteur et le récepteur, il mesure à l'oscilloscope le décalage temporel entre l'émission et la réception.
Les mesures effectuées sont reproduites ci-dessous :

d (en cm)	0	10,0	20,0	30,0	40,0	50,0	60,0
τ (en µs)	0	380	640	980	1240	1600	1820

L'élève trace la courbe $d = f(\tau)$ et la modélise par une fonction linéaire, par exemple à l'aide d'un tableur. Une notice explicative est fournie dans la partie II. *Fiches pratiques à destination des élèves*.



Pour juger de la qualité de la modélisation, on peut :

- **constater** que « Les points expérimentaux semblent bien aléatoirement placés autour de la droite de modélisation. Le choix d'un modèle linéaire semble pertinent. » (GRIESP – Tester relation de conjugaison) ou « On voit très nettement que les points ne se répartissent pas aléatoirement autour de la droite de régression. La modélisation affine n'est donc pas pertinente. La modélisation réalisée montre bien un grand écart avec les valeurs de référence. » (GRIESP – Tester expérimentalement la loi fondamentale de la statique des fluides).

- **calculer** le coefficient directeur de la fonction affine, et utiliser les fonctionnalités du tableur pour déterminer l'incertitude-type sur le coefficient directeur (dès la classe de première). Le mode opératoire est décrit dans la fiche pratique « Tracer une courbe à l'aide d'un tableur » dans la partie *II. Fiches pratiques à destination des élèves*.
  Dans l'exemple proposé ici, on obtient v = 319,1250 m.s^{-1} avec une incertitude-type $u(v)$ = 4,5973 m.s^{-1}. En cohérence avec les chiffres significatifs des mesures, les valeurs sont arrondies à v = 319 m.s^{-1} avec une incertitude-type $u(v)$ = 5 m.s^{-1}.

3.4. <u>Une première approche de la composition des incertitudes</u>

La composition des incertitudes n'est pas au programme de première. Cependant, les élèves de première peuvent être amenés à calculer une grandeur y à partir d'autres grandeurs x_1, x_2, …x_i pour lesquelles ils connaissent l'incertitude-type de chaque grandeur, $u(x_i)$.

Les élèves calculent y_{min}, la plus petite valeur possible de y en prenant pour chaque grandeur la valeur $x_i - u(x_i)$ (ou $x_i + u(x_i)$ si, par exemple, x_i est au dénominateur)
Puis ils calculent y_{max}, la plus grande valeur possible de y en prenant pour chaque grandeur la valeur $x_i + u(x_i)$ (ou $x_i - u(x_i)$ si, par exemple, x_i est au dénominateur)

L'intervalle de confiance a pour demi-largeur : $a = \frac{y_{max} - y_{min}}{2}$.
L'incertitude-type peut être approchée par l'intervalle de confiance : $u(y) = a = \frac{y_{max} - y_{min}}{2}$.

Par exemple :

Un élève souhaite déterminer la concentration en ions fer II d'une solution commerciale « anti-chlorose ». Pour cela, il la dilue 10 fois puis il effectue un titrage colorimétrique de V_1 = 10,0 mL de cette solution commerciale diluée à l'aide d'une solution acidifiée de permangante de potassium, de concentration C_2 = 2,0.10^{-2} mol.L^{-1}.
Le volume versé à l'équivalence est V_E = 9,8 mL.
La concentration molaire C en ions fer II de la solution commerciale est déterminée par la relation :
$C = 10 \times \frac{5.V_E.C_2}{V_1}$
Avec les mesures effectuées, $C = 10 \times \frac{5\times 9{,}8.10^{-3}\times 2{,}0.10^{-2}}{10{,}0.10^{-3}}$
$C = 0{,}98\ \mathrm{mol.L^{-1}}$ avec 2 chiffres significatifs.

La lecture de la verrerie utilisée permet de connaître l'incertitude-type sur les mesures :
$u(V_1)$ = 0,02 mL pour la pipette jaugée
$u(V_E)$ = 0,05 mL pour la burette
L'incertitude sur la concentration a été fournie dans l'énoncé : $u(C_2)$ = 0,1.10^{-2} mol.L^{-1}.

Il faut chercher la valeur minimale de C, puis sa valeur maximale :
$$C_{max} = \frac{50.[V_E+u(V_E)].[C_2+u(C_2)]}{V_1-u(V_1)} = \frac{50.[9{,}8.10^{-3}+0{,}05.10^{-3}].[2{,}0.10^{-2}+0{,}1.10^{-2}]}{10{,}0.10^{-3}-0{,}02.10^{-3}} = 1{,}036\ \mathrm{mol.L^{-1}}$$
$$C_{min} = \frac{50.[V_E-u(V_E)].[C_2-u(C_2)]}{V_1+u(V_1)} = \frac{50.[9{,}8.10^{-3}-0{,}05.10^{-3}].[2{,}0.10^{-2}-0{,}1.10^{-2}]}{10{,}0.10^{-3}+0{,}02.10^{-3}} = 0{,}924\ \mathrm{mol.L^{-1}}$$

L'incertitude-type peut être approchée par l'intervalle de confiance :
$$u(C) = a = \frac{C_{max}-C_{min}}{2} = \frac{1{,}036323-0{,}924401}{2} = 0{,}056\ \mathrm{mol.L^{-1}}$$

Conclusion : la concentration molaire en ions fer II de la solution commerciale vaut 0,98 mol.L^{-1} avec une incertitude-type de 0,06 mol.L^{-1}.

4. A partir de la classe de terminale

En classe de terminale, on ajoute aux notions déjà abordées en seconde et première spécialité :

- La **comparaison** entre un résultat et une valeur de référence qui devient **quantitative** ;
- Lorsque plusieurs grandeurs entrent dans un calcul, les **incertitudes sont composées**, soit à l'aide d'une formule fournie dans l'énoncé, soit à l'aide d'un **langage de programmation** ;
- Les **histogrammes** peuvent également être tracés à l'aide d'un **langage de programmation**.

4.1. Comparaison quantitative entre un résultat et une valeur de référence

La comparaison entre un résultat et une valeur de référence se fait en terminale avec l'outil :

$$\frac{|\boldsymbol{m_{mes}} - \boldsymbol{m_{ref}}|}{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{m})}$$

Si ce rapport indique que l'écart entre la valeur mesurée et la valeur de référence $m_{mes} - m_{ref}$ est du même ordre de grandeur que l'incertitude-type $u(m)$, alors on peut conclure que « la valeur mesurée m_{mes} est compatible avec la valeur de référence m_{ref}. »

Par exemple, à l'issue d'une séance de TP, un élève doit déterminer la concentration en masse d'une solution de chlorure de sodium, avec son incertitude-type associée. En conclusion du TP, il doit vérifier si cette solution de sérum physiologique est bien compatible avec un usage médical, pour lequel on lui donne le critère d'une concentration en masse égale à 9,0 g.L^{-1}. *Détail des calculs dans la partie IV. Annexes*.

Les résultats de l'exploitation de ses mesures permettent à l'élève de déterminer que :

$$C_{m\,exp} = 8{,}17 \text{ g.L}^{-1} \text{ avec une incertitude-type } u(C_m) = 0{,}23 \text{ g.L}^{-1}$$

Pour comparer $C_{m\,exp}$ et la valeur $C_{m\,ref}$ proposée par l'énoncé, il calcule le rapport :

$$\frac{|C_{m\,mes} - C_{m\,ref}|}{u(C_m)} = \frac{|8{,}17 - 9{,}0|}{0{,}23} = 3{,}6$$

Le rapport est de l'ordre de 4 fois l'incertitude-type, donc l'élève peut conclure que « la valeur mesurée $C_{m\,exp} = 8{,}17 \text{ g.L}^{-1}$ est compatible avec la valeur de référence 9,0 g.L^{-1}. La solution de sérum physiologique titrée correspond à un usage médical ».

Le rapport $\frac{|\boldsymbol{m_{mes}} - \boldsymbol{m_{ref}}|}{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{m})}$ n'est pas toujours facile à interpréter… Où poser la limite entre deux valeurs du même ordre de grandeur et deux valeurs qui ne sont pas du même ordre de grandeur ?

On peut être certain que deux grandeurs, ici $|m_{mes} - m_{ref}|$ et $u(m)$, ne sont pas du même ordre de grandeur lorsque le rapport est supérieur ou égal à 10.

L'application des connaissances des élèves sur la comparaison des ordres de grandeur les incite à considérer qu'à partir d'un rapport $\frac{|m_{mes} - m_{ref}|}{u(m)}$ égal à 5, il est certain que les deux grandeurs $|m_{mes} - m_{ref}|$ et $u(m)$ ne sont pas du même ordre de grandeur.

En conclusion, dans un souci de simplification pour les élèves, on peut leur proposer le critère suivant :

- **Si** $\frac{|\boldsymbol{m_{mes}} - \boldsymbol{m_{ref}}|}{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{m})} < \mathbf{5}$, la valeur mesurée $\mathrm{m_{mes}}$ est compatible avec la valeur de référence $\mathrm{m_{ref}}$.
- **Si** $\frac{|\boldsymbol{m_{mes}} - \boldsymbol{m_{ref}}|}{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{m})} \geq \mathbf{5}$, la valeur mesurée $\mathrm{m_{mes}}$ n'est pas compatible avec la valeur de référence $\mathrm{m_{ref}}$.

4.2. Composer les incertitudes, la formule étant fournie

Des exemples d'applications sont détaillés en partie IV. *Annexes*.

Quelques formules usuelles de composition des incertitudes (1) :

- Si $y = k.x$, alors on a $u(y) = k.u(x)$
- Si $y = x_1 + x_2$, alors on a : $u(y) = \sqrt{u(x_1)^2 + u(x_1)^2}$
- Si $y = \frac{x_1.x_2}{x_3}$, alors on a : $u(y) = |y|.\sqrt{\left(\frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{u(x_3)}{x_3}\right)^2}$

(1) La justification de l'expression de ces formules est disponible dans la partie III.5.0. et 5.2., ainsi que la méthode pour déterminer toute autre expression.

4.3. Composer les incertitudes, à l'aide d'une simulation

B.O. « simuler, à l'aide d'un langage de programmation un processus aléatoire illustrant la détermination de la valeur d'une grandeur avec incertitudes-types composées ». Il s'agit de la méthode de **Monte-Carlo**, programmée ici à l'aide du **langage Python**.

Par exemple, lors de l'étude du phénomène d'interférences lumineuses, une photo de l'écran est faite à l'aide d'une webcam. Un logiciel (SalsaJ) permet de mesurer la distance de plusieurs interfranges avec 3 chiffres significatifs. On en déduit la valeur de la longueur d'onde du laser utilisé : $\lambda = \frac{i \times b}{D}$.

Un élève effectue les mesures suivantes :

D = 1,50 m à l'aide d'un mètre à ruban ;
$4i$ = 3,84 cm sur le logiciel SalsaJ
pour un écartement b = 100 µm des fentes de Young.

Il en déduit i = 0,960 cm et $\lambda = \frac{0{,}960.10^{-2} \times 100.10^{-6}}{1{,}50} = 6{,}40.10^{-7}\,\mathrm{m}$

L'incertitude sur la valeur de *b* est donnée par le constructeur : $u(b)$ = 1µm
Les autres incertitudes sont estimées par l'élève, en fonction de la qualité de ses mesures.
Par exemple, un élève a estimé :

- $u(D)$ = 1 cm
- $u(4i)$ = 1 mm donc $u(i)$ = 0,25 mm

Un programme Python est fourni par le professeur. L'élève intervient uniquement dans la partie du programme spécifiée, où il indique les valeurs des grandeurs et leurs incertitudes-types associées. Cette partie du programme est reproduite ci-dessous :

```
###########################################################################
###                      DEBUT DE LA PARTIE A MODIFIER                  ###
###########################################################################
#Entrées
i=[valeur de i,incertitude type sur i]
b=[valeur de b,incertitude type sur b]
D=[valeur de D,incertitude type sur D]
###########################################################################
###                      FIN DE LA PARTIE A MODIFIER                  ###
###########################################################################
```

Le programme complet devient :

```
import numpy as np
from matplotlib import pyplot

############################################################################
#Renvoie une valeur aléatoire de la variable L[0] d'incertitude-type L[1]
def Alea(L):
    tirage=np.random.normal()
    return L[0]+L[1]*tirage
############################################################################
###                       DEBUT DE LA PARTIE A MODIFIER                 ###
############################################################################
#Entrées
i=[0.960e-2,0.25e-3]
b=[100e-6,1e-6]
D=[1.50,0.01]
############################################################################
###                       FIN DE LA PARTIE A MODIFIER                 ###
############################################################################
#Méthode de Monte Carlo pour les interférences
Llambda=[]
Iteration=100000

for j in range(Iteration):
    Alealambda=Alea(i)*Alea(b)/(Alea(D))
    Llambda.append(Alealambda)

Moylambda=sum(Llambda)/Iteration
ulambda=(1/(Iteration-1)*sum((np.array(Llambda)-Moylambda)**2.))**0.5

print('longueur d onde du laser :', Moylambda,' m')
print('u(lambda) :', ulambda,' m')
############################################################################
```

L'élève exécute le programme qui lui fournit les informations suivantes :

```
longueur d onde du laser : 6.401098456610537e-07  m
u(lambda) : 1.8383899046205295e-08  m
```

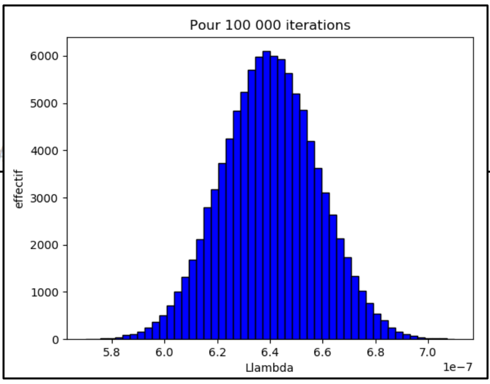
Il peut conclure que λ = 6,40.10^{-7} m avec une incertitude-type u(λ) = 0,19.10^{-7} m

La méthode de Monte-Carlo et ce programme Python sont commentés en détail dans la partie III.5.3

4.4. <u>Tracer un histogramme à l'aide d'un langage de programmation</u>

Le programme Python précédent se termine avec les lignes de commande ci-dessous. Elles permettent d'afficher l'histogramme des valeurs calculées de λ et de vérifier que le nombre d'itérations est suffisant.

```
#Tracé de l'histogramme
pyplot.hist(Llambda, range = (570e-9, 710e-9), bins = 50, color = 'blue', edgecolor =
'black')
pyplot.xlabel('Llambda')
pyplot.ylabel('effectif')
pyplot.title('Pour 100 000 iterations')
pyplot.show()
##########################################
```



L'allure de l'histogramme obtenu ici a bien l'aspect d'une distribution normale, le nombre d'itérations est suffisant.

II. FICHES PRATIQUES A DESTINATION DES ELEVES

Les fiches présentées dans cette partie sont des « mode d'emploi » que les élèves ont à leur disposition pendant les séances de travaux pratiques.

1. TRACER UN HISTOGRAMME

Par exemple :

Les enfants d'un club de sport ont été mesurés. Leurs tailles sont, en cm :

131 135 137 138 141 143 145 145 145 145 146 147 147 148 151 155 156 156 158 158

On regroupe les données en classes.

Par exemple ici on choisit une amplitude de 10 cm.

Taille (en cm)	130 - 139	140 - 149	150 - 159
Effectif	4	10	6

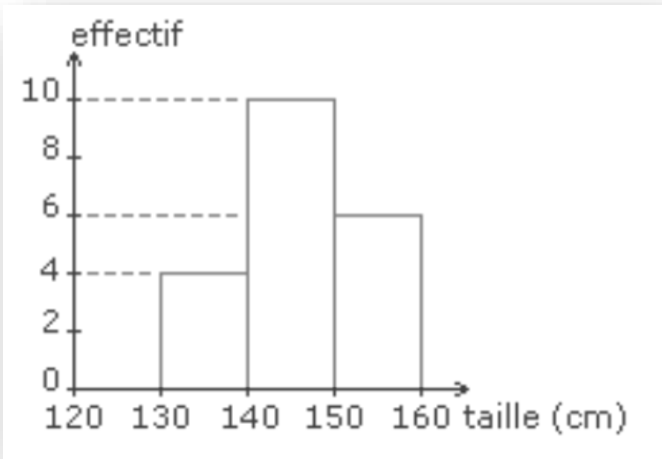
Ainsi 4 enfants mesurent entre 130 et 139 cm

On construit un histogramme avec :

Sur l'axe horizontal, les tailles

Sur l'axe vertical, les effectifs

Les hauteurs des barres sont proportionnelles aux effectifs présentés



On observe, sur le graphique construit, que la catégorie la plus nombreuse concerne les enfants qui mesurent entre 140 et 149 cm

2. TRACER UN HISTOGRAMME
A l'aide du tableur de la suite LIBRE OFFICE

Sur le bureau, ouvrir le dossier **BUREAUTIQUE / LIBRE OFFICE / CLASSEUR CALC**

Attention : Les données doivent être en colonnes (pas en lignes) avec un nom dans la première cellule

1) *TRIER ET CLASSER LES DONNEES :*

- Sélectionner les cellules qui contiennent les données, puis **INSERTION / TABLE DYNAMIQUE / SELECTION ACTIVE**
- Dans la fenêtre de dialogue qui s'ouvre :
- Sélectionner dans **CHAMPS DISPONIBLES** la donnée qui apparaît ; la faire également glisser dans **CHAMPS DE LIGNE** ; développer le menu **SOURCE ET DESTINATION / DESTINATION / SELECTION** et choisir dans la feuille la cellule où apparaîtra le nouveau tableau.
- Glisser à nouveau les données dans **CHAMP DE DONNEES**. ; un double clic sur somme - donnée qui est apparu permet de choisir **NOMBRE** pour calculer le nombre de fois qu'une valeur apparaît dans le tableau.
- Un nouveau tableau apparaît avec les données et le nombre de fois que chaque donnée se répète dans le tableau.

2) *REGROUPER PAR CLASSE :*

- Cliquer sur la première donnée du nouveau tableau, puis aller dans **DONNEES / PLAN ET GROUPE / GROUPER** ; définir les valeurs minimale puis maximale de l'abscisse de l'histogramme, ainsi que la largeur de chaque classe pour regrouper les données. **C'est le professeur qui définit ces valeurs** (minimum, maximum et largeur de la classe).
- Le tableau qui contient les données triées est alors automatiquement modifié.

3) *AFFICHER L'HISTOGRAMME*

- Cliquer sur la première donnée puis aller dans **INSERTION / DIAGRAMME** puis choisir un **HISTOGRAMME**
- Renseigner les rubriques pour donner à l'histogramme l'aspect désiré.

3. TRACER UNE COURBE

A l'aide du tableur de la suite LIBRE OFFICE

Sur le bureau, ouvrir le dossier **BUREAUTIQUE / LIBRE OFFICE / CLASSEUR CALC**

TRACER LE GRAPHE

- Sélectionner les cellules où sont placées les données du graphique à tracer.
- Tracer le graphique sous la forme d'un nuage de points dans le menu **INSERTION / DIAGRAMME** :
  1. Type de diagramme : XY(dispersion) ; points seuls
  2. Plage de données : série de données en lignes ou en colonnes selon le cas
  3. Série de données : par défaut, les cellules déjà sélectionnées
  4. Eléments du diagramme : choisir le titre, etc…

MISE EN FORME (obligatoire)

Aspect des points

- Double cliquer sur les points pour ouvrir la boîte de dialogue **SERIE DE DONNEES.**
- Dans l'onglet **LIGNE**, modifier l'**ICONE** et **SELECTIONNER** comme **SYMBOLE** une croix horizontale-verticale : +

Précision de l'échelle

Pour faire apparaître des graduations équivalentes à du papier millimétré :

- Double cliquer sur l'**AXE X** pour ouvrir la boîte de dialogue correspondante.
- Dans l'onglet **ECHELLE**, régler le **NOMBRE D'INTERVALLES SECONDAIRES** à 10 pour une lecture équivalente à du papier millimétré.
- Même procédure pour l'**AXE Y**.

Grille de lecture

- Dans la zone de graphique, sélectionner la zone de diagramme.
- Dans **INSERTION / GRILLES**, faire apparaître les grilles principales et secondaires sur l'axe X et sur l'axe Y : le papier millimétré appararaît.

IMPRIMER UNE COURBE (si nécessaire)

- Dans **FORMAT / PAGE** choisir dans l'onglet **PAGE** l'orientation **PAYSAGE**.
- Ajuster les dimensions du graphe à la taille d'une page
- Ajouter votre nom sur le document (par exemple par un clic droit dans le graphique et **INSERER UN TITRE**)
- Imprimer la page qui contient le graphe.

SUPERPOSER UNE 2ème COURBE (si nécessaire)

- Double cliquer sur la zone de **DIAGRAMME**, puis clic droit pour choisir dans le menu déroulant **PLAGE DE DONNEES.**
- Cliquer sur l'icône **SELECTIONNER LA PLAGE DE DONNEES** puis modifier la sélection avec la souris pour sélectionner les données correspondant à la 2ème courbe à superposer sur la courbe précédente.
- On peut faire apparaître un axe vertical secondaire correspondant aux données de la 2ème courbe par un clic droit dans la zone de **DIAGRAMME** pour choisir dans le menu déroulant **INSERER/SUPPRIMER DES AXES** puis cocher l'axe y dans **AXES SECONDAIRES**.

4. MODELISER UNE COURBE

A l'aide du tableur de la suite LIBRE OFFICE

Sur le bureau, ouvrir le dossier **BUREAUTIQUE / LIBRE OFFICE / CLASSEUR CALC**

TRACER LE GRAPHE

(Cf. fiche pratique 3)

MODELISER UNE COURBE

- Le graphique doit être sélectionné (par un double-clic si nécessaire), puis sélectionner les points du graphe en cliquant sur l'un d'eux.
- Dans le menu **INSERTION / COURBE DE TENDANCE** choisir le modèle qui convient le mieux.
- Par exemple pour une fonction **affine**, choisir une **COURBE DE TENDANCE LINEAIRE**. On peut **FORCER L'ORDONNEE A L'ORIGINE** pour une fonction **linéaire**. Sélectionner **AFFICHER L'EQUATION** pour faire apparaître le résultat de la modélisation sur le graphe.

COEFFICIENT DIRECTEUR D'UNE DROITE ET INCERTITUDE-TYPE

<u>Cas d'une fonction linéaire</u>

- Pour afficher le coefficient directeur avec son incertitude, sélectionner 2 cases vides l'une sous l'autre pour la plage de sortie (où s'inscriront les résultats).
- Dans la zone de formule, écrire **=DROITEREG**(sélectionner les cellules qui contiennent y ; sélectionner les cellules qui contiennent x ;0;1) puis **CTRL + MAJ + ENTREE**

Signification des résultats :

Le premier nombre qui s'affiche est	le coefficient directeur k
Le deuxième nombre qui s'affiche est	l'incertitude-type du coefficient directeur u(k)

<u>Cas d'une fonction affine</u>

- Pour afficher le coefficient directeur avec son incertitude, sélectionner 4 cases vides pour la plage de sortie en 2x2 (où s'inscriront les résultats).
- Dans la zone de formule, écrire **=DROITEREG**(sélectionner les cellules qui contiennent y ; sélectionner les cellules qui contiennent x ;1;1) puis **CTRL + MAJ + ENTREE**

Signification des résultats :

le coefficient directeur a	L'ordonnée à l'origine b
incertitude-type du coefficient directeur u(a)	incertitude-type de l'ordonnée à l'origine u(b)

5. COMMENT ESTIMER L'INCERTITUDE-TYPE u(x) ? en première

Une seule mesure de x : x_{mes}

On trouve une estimation de l'incertitude-type dans les **caractéristiques techniques de l'appareil**
En l'absence d'indication, on doit faire un choix à partir de la plus petite graduation lisible sur l'appareil

La même mesure de x est répétée n fois dans les mêmes conditions :
$x_1, x_2, x_3, \dots x_n$

Utilisation de l'outil numérique :
Une calculatrice ou un tableur.
Les n mesures sont recopiées dans l'outil numérique qui calcule automatiquement :
- La moyenne $\overline{x}$ meilleure estimation de x_{mes}
- L'écart-type s(x)

Calcul de l'incertitude type : $u(x) = \frac{s(x)}{\sqrt{n}}$

Une grandeur f est calculée à partir de plusieurs autres grandeurs mesurées x, y, z…

Ex : une vitesse est calculée à partir des mesures d'une distance D et d'une durée Δt.

Calculer f_{min} et f_{max}
Calculer f_{min}, la plus petite valeur possible de f et f_{max} la plus grande valeur possible de f en prenant pour chaque grandeur x-u(x), y-u(y), z-u(z) ou x+u(x), y+u(y), z+u(z)

Calcul approché de l'incertitude-type
L'incertitude-type peut être approchée par le calcul

$$u(f) = \frac{f_{max} - f_{min}}{2}$$

Estimation de l'incertitude-type u(x)
donnée avec 1 ou 2 chiffres significatifs

Conclusion
On rédige une réponse du type :
« x = x_{mes} avec une incertitude-type u(x) »

Laure FANTASIA – Académie de Nice

6. UNE MESURE INCERTAINE ?
en terminale

On cherche à connaître une grandeur, notée **x**.

Pour cela, on effectue **une** ou **plusieurs** mesures, notée(s) x_{mes}.

La moyenne des mesures est la meilleure estimation de x_{mes}

La valeur mesurée x_{mes} **n'est pas égale à la grandeur x**.

Pourquoi ?

- Les « mauvaises » performances de l'appareil de mesure ou de l'expérimentateur,

- La grandeur mesurée subit des variations spontanées.

Pour déterminer la confiance que l'on peut accorder à x_{mes} , il faut calculer

l'incertitude-type notée u(x)

Le calcul de u(x) est expliqué page suivante

On rédige une réponse du type :

« **$x = x_{mes}$ avec une incertitude-type u(x)** »

Si on dispose d'une valeur de référence, notée $x_{réf}$, on effectue le calcul :

$$z = \frac{|x_{mes} - x_{réf}|}{u(x)}$$

Et on rédige une réponse du type

« **x_{mes} est en accord avec la valeur de référence $x_{réf}$** » si la valeur de z est de l'ordre de grandeur de 1

« **x_{mes} n'est pas en accord avec la valeur de référence $x_{réf}$** » si la valeur de z est de l'ordre de grandeur de 10

7. COMMENT ESTIMER L'INCERTITUDE-TYPE u(x) ? en terminale

Une seule mesure de x : x_{mes}

On trouve une estimation de l'incertitude-type dans les **caractéristiques techniques de l'appareil**
En l'absence d'indication, on doit faire un choix à partir de la plus petite graduation lisible sur l'appareil

Plusieurs mesures
La même mesure de x est répétée n fois, dans les mêmes conditions.
On obtient : $x_1, x_2, x_3, \dots x_n$

Utilisation de l'outil numérique :
Une calculatrice, un tableur, un programme Python, etc….
Les n mesures sont recopiées dans l'outil numérique qui calcule automatiquement :
- La moyenne $\bar{x}$ meilleure estimation de x_{mes}
- L'écart-type s(x)

Calcul de l'incertitude type : $u(x) = \frac{s(x)}{\sqrt{n}}$

Un calcul
Une grandeur f est calculée à partir de plusieurs autres grandeurs mesurées x, y, z…
Ex : une longueur d'onde est calculée à partir des mesures d'une distance D, d'une largeur d et la taille d'un obstacle a

L'outil : composer les incertitudes
Une formule, donnée par le professeur, ou un outil numérique permet de composer les incertitudes u(x), u(y), u(z), ….

Quelques formules usuelles de composition des incertitudes
Si $y = k.x$, alors on a $u(y) = k.u(x)$
Si $y = x_1 + x_2$, alors on a : $u(y) = \sqrt{u(x_1)^2 + u(x_1)^2}$
Si $y = \frac{x_1 . x_2}{x_3}$ alors on a : $u(y) = |y| . \sqrt{\left(\frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{u(x_3)}{x_3}\right)^2}$

Estimation de l'incertitude-type
u(x)
exprimée avec 1 ou 2 chiffres significatifs

III. POUR ALLER PLUS LOIN

Pour ceux qui le désirent, cette troisième partie permet d'**approfondir** ce qui a été présenté dans dans les deux premières parties. Elle permet également de **répondre aux questions** qui se posent fréquemment, toujours dans le contexte bien particulier des sciences physiques au lycée.

A l'exception des fiches 5.3 et 5.4, cette 3ème partie s'appuie sur le Guide pour l'expression de l'incertitude de mesure publié par le Bureau International des Poids et Mesures du Bureau International des Poids et Mesures. Dans cette partie, toutes les notes de la forme « *§ XXX* » font référence à ce document*.

** Bureau International des Poids et Mesures – BIMP ; Evaluation des données de mesure – Guide pour l'expression de l'incertitude de mesure ; JCGM 100 : 2008 ; GUM 1995 avec des corrections mineures*
https://www.bipm.org/utils/common/documents/jcgm/JCGM_100_2008_F.pdf

1 MESURE D'UNE GRANDEUR PHYSIQUE

Le **MESURANDE** (1) :
la grandeur que l'on veut connaître
(par exemple la pression)

Le **MESURAGE** (2) :
Opérations ayant pour but de déterminer une valeur du mesurande
(de la grandeur que l'on veut connaître).

Le **RÉSULTAT** du mesurage :

Estimation de la
VALEUR
du mesurande

+

INCERTITUDE
de cette estimation

Caractérise la **DISPERSION** des valeurs attribuées au mesurande
§2.2.3.

Lorsqu'elle est exprimée sous la forme d'un **ÉCART-TYPE**, on parle d'**INCERTITUDE-TYPE**
§2.3.1.

Comporte une
ERREUR

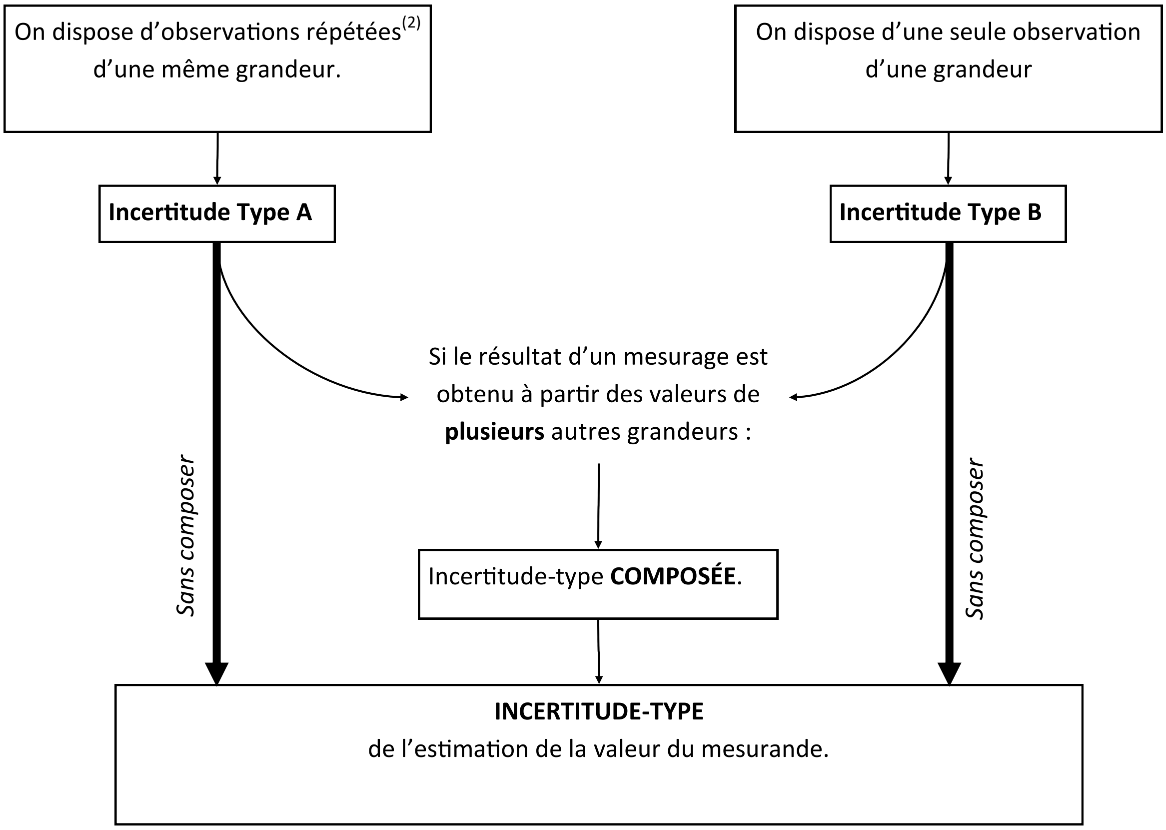
☠
Erreur ≠ incertitude
Concepts différents
§3.2.2 note 2

SYSTÉMATIQUE
due au décalage entre la moyenne des mesurages et la valeur « vraie » du mesurande
§B.2.22.

ALÉATOIRE
due au décalage entre le résultat d'un seul mesurage et la moyenne des mesurages
§B.2.21.

(1) Souvent nommé « grandeur mesurée »
(2) Le terme « mesure » est déconseillé car sa signification diffère selon les contextes et la langue employée.

2 LES DIFFÉRENTES INCERTITUDES « TYPE »(1)



*L'incertitude-type **ÉLARGIE** est abandonnée dans les nouveaux programmes, conformément à la recommandation du GUM §6.1.1.*

*(1) Incertitude « **TYPE** » car exprimée sous la forme d'un **ÉCART-TYPE***

(2) Observations répétées dans des conditions de répétabilité (§B.2.15 note 2) :

- ◊ *Même mode opératoire*
- ◊ *Même observateur*
- ◊ *Même instrument de mesure utilisé dans les mêmes conditions*
- ◊ *Même lieu*
- ◊ *Répétition durant une brève période de temps.*

3.0 INCERTITUDE-TYPE de type A

- L’essentiel -

ÉCHANTILLON

On dispose de n observations indépendantes d’une **VARIABLE ALÉATOIRE**[1] x, réalisées dans les mêmes conditions de mesure.

MOYENNE $\bar{x}$

de l’échantillon, des n observations indépendantes

$$\bar{x} = \frac{1}{n} . \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Il n’y a plus que

n-1 VARIABLES INDÉPENDANTES

dans l’ensemble $\{x_i - \bar{x}\}$ de toutes les variables aléatoires centrées $x_i - \bar{x}$ [2]

VARIANCE …

$$s^2(x) = \frac{1}{n-1} . \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

$\sqrt{variance} = écart - type$

ECART-TYPE … [3]

$$s(x) = \sqrt{\frac{1}{n-1} . \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$

§ 4.2.2

… **EXPÉRIMENTAL**(E)

Caractérisent la dispersion des mesures x_i autour de leur moyenne $\bar{x}$

Variance expérimentale

DE LA MOYENNE

$$s^2(\bar{x}) = \frac{1}{n} s^2(x)$$

§ 4.2.3

Quantifient la manière dont la moyenne $\bar{x}$ estime au mieux l’espérance mathématique de x

§ 4.2.3.

Ecart-type expérimental

DE LA MOYENNE

$$s(\bar{x}) = \frac{s(x)}{\sqrt{n}}$$

aussi nommé

INCERTITUDE-TYPE de type A

$$\boldsymbol{u(\bar{x}) = \frac{s(x)}{\sqrt{n}}}$$

(1) Une variable aléatoire peut prendre n’importe quelle valeur d’un ensemble déterminé

(2) En effet, il y a une corrélation entre x_i et $\bar{x}$ *§G.3.2 loi de Student*

(3) Pour calculer s(x) : sous EXCEL, fonction ECARTYPE.STANDARD ; sous LIBRE OFFICE, fonction ECARTYPE.

3.1 ÉCART-TYPE : σ(x) ou s(x) ?

σ(x) : on connaît toutes les valeurs
s(x) : on connaît un échantillon des valeurs

POPULATION : *§ C.2.16*
Toutes les valeurs possibles d'une **VARIABLE ALÉATOIRE** associées à la **LOI DE PROBABILITÉ**
x

§ C.2.2.

§ C.2.3.

CONTINUE
peut prendre toutes les valeurs à l'intérieur d'un intervalle
non traité ici.

DISCRÈTE
peut prendre des valeurs isolées, à l'intérieur d'un intervalle.

Détermine la probabilité qu'une variable aléatoire prenne une valeur

Si on ne dispose que de n observations de la variable aléatoire x (observations indépendantes, dans les mêmes conditions de mesure), on a alors un **ÉCHANTILLON** de la population.

Par exemple, résultat x d'un lancer de dés
POPULATION = valeurs possibles + loi de probabilité
1, 2, 3, 4, 5, 6 $\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}$

Par exemple, 5 lancers de dés = 5 observations
ECHANTILLON = 2, 3, 4, 5, 5

La valeur espérée de la variable x, ou E(x)
ESPÉRANCE MATHÉMATIQUE :
$E(x) = \sum p_i . x_i$ pour une variable **DISCRÈTE**.
p_i : Probabilité de la variable x_i.
x_i : Valeur x_i que peut prendre la valeur x. *§ C.2.9*

Statistiquement estimée par ...

MOYENNE $\bar{x}$
$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Par exemple, lancer de dés
$$E(x) = \frac{1}{6}\times 1 + \frac{1}{6}\times 2 + \frac{1}{6}\times 3 + \frac{1}{6}\times 4 + \frac{1}{6}\times 5 + \frac{1}{6}\times 6$$
E(x)= 3,5

Par exemple, 5 lancers de dés
$$\bar{x} = \frac{1}{5}(2 + 3 + 4 + 5 + 5) = 3{,}8$$

L'écart entre la valeur x_i et la valeur espérée E(x) est la **VARIABLE ALÉATOIRE CENTRÉE** x_i - E(x)

Statistiquement estimée par ...

L'écart entre la valeur x_i et $\bar{x}$ est la **VARIABLE ALÉATOIRE CENTRÉE** $x_i - \bar{x}$

Il n'y a plus que n-1 variables indépendantes.

La **VARIANCE** est l'espérance (valeur espérée) du carré de la variable aléatoire centrée
$$\sigma^2(x) = E\{(x - E(x))^2\}$$
§ C.2.11

Statistiquement estimée par ...

VARIANCE EXPÉRIMENTALE
$$s^2(x) = \frac{1}{n-1} . \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

Par exemple, lancer de dés
$$\sigma^2(x) = \frac{1}{6}\{(1 - 3{,}5)^2\} + \frac{1}{6}\{(2 - 3{,}5)^2\} + \cdots \frac{1}{6}\{(6 - 3{,}5)^2\} = 2{,}9166..$$

Par exemple, 5 lancers de dés
$$s^2(x) = \frac{1}{4}[(2 - 3{,}8)^2 + (3 - 3{,}8)^2 + \cdots (5 - 3{,}8)^2] = 1{,}7$$

$$Ecart - type = \sqrt{variance} = \sigma(x)$$

ECART-TYPE EXPÉRIMENTAL s(x)

Par exemple, lancer de dés : $\sigma(x) = \sqrt{2{,}9166 \ldots} = 1{,}7078 \ldots$

Par exemple, 5 lancers de dés
$s(x) = \sqrt{1{,}7} = 1{,}3038 \ldots$

Remarque : un écart-type a la même dimension que la variable x *§ 4.2.3 note 2* ; ce n'est pas le cas de la variance.

Laure FANTASIA - Académie de Nice

3.2 Pourquoi passer de s(x) à s(x̄) ?

s(x) : écart-type expérimental

s(x̄): écart-type expérimental de la moyenne

Par exemple, lancer de dés sous excel avec la fonction alea.entre.bornes(1;6)

ECHANTILLON : n observations (ou mesures) indépendantes entre elles d'une variable aléatoire x.

Série de mesures n°	1	2	3
Nombre de lancers	5	10	50
s(x)=ecartype.standard	0,837	1,79	1,64
$s(\bar{x}) = \frac{s(x)}{\sqrt{nombre\ de\ lancers}}$	0,374	0,567	0,232
moyenne	3,80	3,90	3,44

Un exemple de valeurs obtenues.

MOYENNE x̄ estimation statistique de la valeur espérée de la variable x (résultat du lancer de dés)

ÉCART-TYPE EXPÉRIMENTAL s(x) (1) caractérise la dispersion des mesures x_i autour de leur moyenne x̄ ;

Variance :

$$s^2(x) = \frac{1}{n-1}.\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

Ecart-type :

$$s(x) = \sqrt{\frac{1}{n-1}.\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

Dans l'exemple, pour les 3 échantillons proposés, on constate que l'échantillon n°1 de 5 lancers a l'écart-type expérimental le plus faible : c'est donc dans cet échantillon que les valeurs sont les moins dispersées autour de leur moyenne.

ÉCART-TYPE EXPÉRIMENTAL DE LA MOYENNE

La variance expérimentale de la moyenne est : $s^2(\bar{x}) = \frac{1}{n}s^2(x)$

L'écart-type expérimental de la moyenne $s(\bar{x}) = \frac{s(x)}{\sqrt{n}}$ quantifie la manière dont la moyenne x̄ estime au mieux la valeur espérée (le mesurande).

Dans l'exemple, l'échantillon n°3 de 50 lancers a l'écart-type expérimental de la moyenne le plus faible ; en effet le nombre de mesures est plus grand ; c'est dans cet échantillon que la moyenne estime au mieux la valeur espérée de x (en effet 3,44 plus proche de 3,5 → cf. fiche III.3.1.

(1) Calcul de l'écart-type s(x) :

- ◊ sous Excel : ECARTYPE.STANDARD « Cette fonction fait l'hypothèse que les arguments [les données] ne représentent qu'un échantillon de la population »
- ◊ Sous Libre Office : ECARTYPE « Calcule l'écart-type en se basant sur un échatillon »

4.0 INCERTITUDE-TYPE

de type B

- L'essentiel-

On dispose d'**UNE SEULE OBSERVATION** d'une grandeur (du mesurande)

Déterminer l'**INCERTITUDE-TYPE** de cet unique mesurage avec :

Une **INDICATION** du fabriquant de l'instrument de mesure	**AUCUNE INDICATION** du fabriquant de l'instrument de mesure	L'exploitation d'une **FONCTION AFFINE**

- ◊ Un écart-type *
- ◊ Un multiple d'écart-type* *§4.3.3*
- ◊ Un intervalle ayant un niveau de confiance
- ◊ Un intervalle
- ◊ Des notions mal définies comme « précision » ou « tolérance »

- ◊ La grandeur mesurée est le coefficient directeur d'une fonction affine modélisant une série de mesures
- ◊ La grandeur mesurée est lue par report d'un point sur cette fonction affine

Cette partie est traitée sur des exemples dans la partie IV. Annexes

** Rappel : incertitude-type = écart-type*

4.1 INCERTITUDE-TYPE de type B

- Exploiter les indications du fabriquant de l'appareil de mesure -

- Un **INTERVALLE** avec un **NIVEAU DE CONFIANCE** exprimé en % *§4.3.4 et 4.3.5*

« incertitude ± a avec un niveau de confiance de 50%, 90%, 95% ou 99% »

On considère qu'une loi de probabilité NORMALE a été utilisée. L'incertitude-type u(x) est :

- $1{,}48.a$ pour un niveau de confiance de 50%
- $\frac{a}{1{,}64}$ pour un niveau de confiance de 90%
- $\frac{a}{1{,}96}$ pour un niveau de confiance de 95%
- $\frac{a}{2{,}58}$ pour un niveau de confiance de 99%
- $\frac{a}{3}$ pour un niveau de confiance de 99,73% *§F.2.3.3*

- Un **INTERVALLE** sans indication de niveau de confiance(1) *§4.3.7*

La probabilité est maximale (égale à 1) de trouver la grandeur mesurée dans l'intervalle entre a_{min} et a_{max}. La probabilité est nulle en dehors de cet intervalle.

- Si on considère que la distribution est uniforme (ou rectangulaire), alors $u(x) = \frac{a}{\sqrt{3}}$ avec $a = \frac{a_{max}-a_{min}}{2}$ demi-largeur de l'intervalle.
- Si on considère que la distribution est triangulaire (on estime que la valeur la plus probable est au centre de l'intervalle), alors $u(x) = \frac{a}{\sqrt{6}}$. *§4.3.9.b*

- Les notions mal définies de « **PRÉCISION** » ou « **TOLÉRANCE** » (2)

En général fournies sous forme d'un pourcentage p%. on peut estimer l'incertitude-type $u(x) = \frac{p}{100} \times x$

(1) Par exemple lecture sur une burette ; longueur d'onde indiquée sur un laser

(2) Ces notions ne sont pas abordées dans GUM ; elles sont évoquées dans les documents du GRIESP « Tester la loi de la statique des fluides » p.12

4.2 INCERTITUDE-TYPE de type B

- En l'absence d'indications du fabriquant de l'appareil de mesure -

- Lecture sur un **AFFICHAGE NUMÉRIQUE** *§ F.2.2.1*

La **RÉSOLUTION** de l'appareil de mesure est la plus petite valeur qu'il peut indiquer. Elle est notée δx.

La valeur qui produit une indication x peut se situer, avec une égale probabilité (loi RECTANGULAIRE) dans l'intervalle $\left[x-\frac{\delta x}{2} ; x+\frac{\delta x}{2}\right]$

L'incertitude-type est $u(x)=\frac{\delta x / 2}{\sqrt{3}}$ ou $u(x)=\frac{\delta x}{\sqrt{12}}$

Par exemple, pour une balance dont l'indication la plus petite est 1 g : δx = 1 g : $u(x)=\frac{1}{\sqrt{12}}=0{,}29 g$

Remarque : si le dernier chiffre affiché VARIE CONTINUELLEMENT, il est préférable de mette en place un moyen pour GELER l'indication à un instant arbitraire et noter ce résultat. *§F.1.1.5*

- Lecture sur des **GRADUATIONS** sur une règle graduée en millimètres

Le raisonnement est le même en notant δx la plus petite graduation, mais il y a une DOUBLE LECTURE : le zéro et la lecture de x. La mesure de la longueur L est faite entre z_A (la graduation zéro) et z_B (la longueur à mesurer) : $L = z_B - z_A$

Il y a donc une incertitude à la fois sur z_A et sur z_B : $u(z_A)$ et $u(z_B)$

D'après la loi de propagation des incertitudes [1], $u(L)=\sqrt{u^2(z_A)+u^2(z_B)}$

[1] Cf. partie III.5.0

1

1ère proposition, qui respecte la plus défavorable des lois de probabilité, la loi rectangulaire :

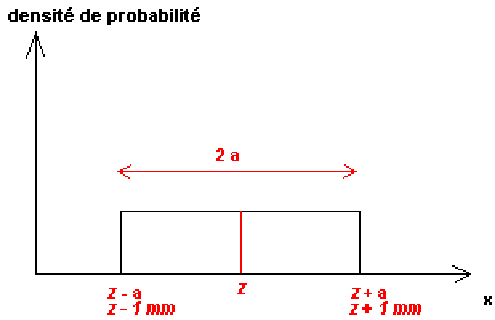
La règle est graduée en millimètres. La valeur « vraie » se trouve dans l'intervalle illustré ci-contre, dans la situation la plus défavorable. La meilleure estimation de z se trouve au milieu de l'intervalle, avec une incertitude-type (cas de la loi rectangulaire) :

$$u(z)=\frac{a}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}} mm$$

On en déduit u(L) :

$$u(L)=\sqrt{u^2(z_A)+u^2(z_A)}=\frac{\sqrt{6}}{3}=0{,}81649 \text{ mm}$$

Avec le choix le plus défavorable pour l'arrondi de l'incertitude : u(L) = 0,9 mm.



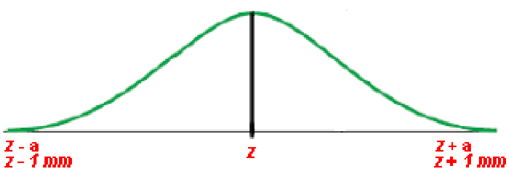
2ème proposition, où on choisit une loi normale, la plus favorable:

La règle est graduée en millimètres. La valeur « vraie » se trouve dans l'intervalle illustré ci-contre, toujours dans la situation la plus défavorable d'une demi-étendue de 1 mm. La meilleure estimation de z se trouve au milieu de l'intervalle, avec une incertitude-type (cas de la loi normale avec 99,73 % de chances de trouver z dans cet intervalle) :

$$u(z)=\frac{a}{3}=\frac{1}{3} mm$$

$$u(L)=\sqrt{u^2(z_A)+u^2(z_A)}=\frac{\sqrt{2}}{3}=0{,}47140 \text{ mm}$$

Avec le choix pour l'arrondi de l'incertitude : u(L) = 0,5 mm



5.0 COMPOSER LES INCERTITUDES

- L'essentiel-

Une grandeur Y est calculée à partir de n grandeurs X_1, X_2,… X_n

X_i **INDÉPENDANTES ENTRE ELLES** $Y = f(X_1, X_2, \ldots X_n)$

Estimation x_1 et son incertitude-type (type A ou B) $u(x_1)$

Estimation x_i et son incertitude-type (type A ou B) $u(x_i)$

Estimation x_n et son incertitude-type (type A ou B) $u(x_n)$

La loi de propagation des incertitudes permet de calculer la **VARIANCE COMPOSÉE** :

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i)$$

§5.1.2

INCERTITUDE-TYPE COMPOSÉE (1)

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i)}$$ (2)

Exemple 1 :

$$y = k.x$$

$$u_c(y) = |k|.u(x)$$

Exemple 2 :

$$y = x_1 + x_2 \quad \text{ou} \quad y = x_1 - x_2$$

$$u_c(y) = \sqrt{u^2(x_1) + u^2(x_2)}$$

Exemple 3 :

$$y = \frac{x_1 \times x_2}{x_3}$$

$$u_c(y) = |y|.\sqrt{\left(\frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{u(x_3)}{x_3}\right)^2}$$

(1) *D'après le THÉORÈME CENTRAL LIMITE, la loi de probabilité d'une grandeur $Y = f(X_1, X_2, \ldots X_n)$ peut être considérée comme NORMALE, même si les lois de X_i ne sont pas normales* *§ G.2.*

(2) *On peut aussi composer les incertitudes à l'aide de la méthode de MONTE CARLO* *Cf. partie III.5.3.*

5.1 Incertitude de TYPE A ET de TYPE B POUR UNE MÊME GRANDEUR : Que faire ?

Par exemple, au cours d'un titrage, un élève lit sur une burette graduée le volume équivalent V_E

Cette mesure est reproduite 8 fois par tous les binômes du groupe, dans des conditions proches des conditions de répétabilité

En utilisant les indications portées sur la burette, on estime :

L'incertitude-type de

TYPE B

$u_B(V_E)$

On calcule la moyenne de toutes les données $\overline{V_E}$ et on estime :

L'incertitude-type de

TYPE A

$u_A(\overline{V_E})$

On peut tenir compte de ces deux incertitudes en les **COMPOSANT**

Pour une loi rectangulaire, $u_B(V_E)$ introduit une correction additive $\Delta\overline{V_E}$ à la moyenne $\overline{V_E}$ des différentes données et $V_E = \overline{V_E} \pm \Delta\overline{V_E}$

§ 4.3.7 exemple 2 et § 5.1.5

Incertitude-type **COMPOSÉE :**

$$u_C(V_E) = \sqrt{u^2(\overline{V_E}) + u^2(\Delta\overline{V_E})}$$

Soit

$$u_C(V_E) = \sqrt{u_A^2(\overline{V_E}) + u_B^2(V_E)}$$

5.2

DÉMONSTRATION

des formules de composition des incertitudes

Exemple 1 :

$y = k.x$

$$u_c^2(y) = \left(\frac{\partial(k.x)}{\partial x}\right)^2 u^2(x)$$

$$u_c^2(y) = k^2.u^2(x)$$

$$u_c(y) = |k|.u(x)$$

Exemple 2 :

$y = x_1 + x_2$ ou $y = x_1 - x_2$

$$u_c^2(y) = \left(\frac{\partial(x_1+x_2)}{\partial x_1}\right)^2 u^2(x_1) + \left(\frac{\partial(x_1+x_2)}{\partial x_2}\right)^2 u^2(x_2)$$

$$u_c^2(y) = 1.u^2(x_1) + 1.u^2(x_2)$$

$$u_c(y) = \sqrt{u^2(x_1) + u^2(x_2)}$$

Exemple 3 :

$y = \frac{x_1 \times x_2}{x_3}$

$$u_c^2(y) = \left(\frac{\partial\left(\frac{x_1.x_2}{x_3}\right)}{\partial x_1}\right)^2 u^2(x_1) + \left(\frac{\partial\left(\frac{x_1.x_2}{x_3}\right)}{\partial x_2}\right)^2 u^2(x_2) + \left(\frac{\partial\left(\frac{x_1.x_2}{x_3}\right)}{\partial x_3}\right)^2 u^2(x_3)$$

$$u_c^2(y) = \left(\frac{x_2}{x_3}\right)^2 u^2(x_1) + \left(\frac{x_1}{x_3}\right)^2 u^2(x_2) + \left(-\frac{x_1.x_2}{x_3^2}\right)^2 u^2(x_3)$$

$$u_c^2(y) = \left(\frac{x_1.x_2}{x_3}\right)^2 \left[\frac{1}{x_1^2}u^2(x_1) + \frac{1}{x_2^2}u^2(x_2) + \frac{1}{x_3^2}u^2(x_3)\right]$$

$$u_c^2(y) = y^2\left[\frac{u^2(x_1)}{x_1^2} + \frac{u^2(x_2)}{x_2^2} + \frac{u^2(x_3)}{x_3^2}\right]$$

$$u_c(y) = |y|.\sqrt{\left(\frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{u(x_3)}{x_3}\right)^2}$$

5.3

COMPOSER LES INCERTITUDES

Méthode de MONTE CARLO*

- Principe général -

Une grandeur Y est calculée à partir de n grandeurs X_1, X_2,… X_n indépendantes entre elles.

La simulation Monte-Carlo calcule un très grand nombre de résultats possibles pour y, à partir d'un ensemble de valeurs d'entrée x_1, x_2,… x_n qui présentent chacune une certaine incertitude $u(x_1)$, $u(x_2)$,… $u(x_n)$. Elle s'appuie sur une distribution de probabilité pour chaque valeur d'entrée x_i, qui peut prendre aléatoirement n'importe quelle valeur comprise entre une valeur minimale et maximale selon une loi de distribution, normale par exemple. Ainsi $x_{i\ calculé}$ peut prendre n'importe quelle valeur comprise dans un intervalle centré sur x_i, selon une loi de distribution normale : $x_{i\ calculé}$ a 68% de chances d'être dans l'intervalle $[x_i - u(x_i)\ ;\ x_i + u(x_i)]$ ou 99% de chances d'être dans l'intervalle $[x_i – 3.u(x_i)\ ;\ x_i + 3.u(x_i)]$.

La simulation recalcule le résultat y à maintes reprises, en utilisant à chaque fois pour les valeurs d'entrée x_i un ensemble différent de nombres aléatoires $x_{i\ calculé}$. Le nombre de résultats pour y est suffisant lorsqu'il constitue un échantillon représentatif de toutes les combinaisons possibles des valeurs d'entrée $x_{i\ calculé}$ prises aléatoirement dans l'intervalle centré sur x_i, selon une loi de distribution normale .

(*) Le nom de la méthode fait allusion au casino de Monte-Carlo, car l'élément de hasard est au cœur de l'approche de modélisation

5.4 COMPOSER LES INCERTITUDES

Méthode de MONTE CARLO

- A l'aide d'un langage de programmation -

Une grandeur Y est calculée à partir de n grandeurs X_1, X_2,… X_n indépendantes entre elles.

Le programme Python ci-dessous calcule l'incertitude-type composée d'une longueur d'onde λ, à partir des valeurs de i (l'interfrange), b (l'écartement des fentes de Young) et D (la distance entre l'obstacle et l'écran).

```
import numpy as np
from matplotlib import pyplot

###########################################################################
#Renvoie une valeur aléatoire de la variable L[0] d'incertitude-type L[1]
def Alea(L):
    tirage=np.random.normal()
    return L[0]+L[1]*tirage
```

« tirage » est un nombre aléatoire entre - ∞ et + ∞ respectant une loi de distribution normale.

xi[0] représente la valeur de xi et **xi[1]** représente la valeur de l'incertitude-type associée u(xi). Ces valeurs sont renseignées par l'utilisateur du programme.

La fonction « **Alea** », lorsqu'elle sera appliquée à xi, renverra la valeur calculée $x_{i\ calculé}$ = xi[0]+xi[1]*tirage.

Ainsi $x_{i\ calculé}$ peut prendre n'importe quelle valeur comprise dans un intervalle centré sur x_i, selon une loi de distribution normale : $x_{i\ calculé}$ a 68% de chances d'être dans l'intervalle $[x_i - u(x_i) ; x_i + u(x_i)]$ ou 99% de chances d'être dans l'intervalle $[x_i – 3.u(x_i) ; x_i + 3.u(x_i)]$.

```
##########################################################################
###                     DEBUT DE LA PARTIE A MODIFIER                 ###
##########################################################################
#Entrées
i=[0.960e-2,0.25e-3]
b=[100e-6,1e-6]
D=[1.50,0.01]
##########################################################################
###                     FIN DE LA PARTIE A MODIFIER                  ###
##########################################################################
```

Dans cette partie, l'utilisateur a renseigné chaque valeur d'entrée xi et l'incertitude-type associée u(xi)

```
#Méthode de Monte Carlo pour les interférences
Llambda=[]
Iteration=100000
```

Llambda=[ ] définit une liste vide dans laquelle seront stockées toutes les valeurs de lambda qui vont être calculées.

Iteration indique ici que 100 000 valeurs de lambda seront calculées

```
for j in range(Iteration):
    Alealambda=Alea(i)*Alea(b)/(Alea(D))
    Llambda.append(Alealambda)
```

Le calcul de lambda reprend son expression : lambda = i*b/D. Ce calcul fait appel à une valeur aléatoire pour i, pour b et pour D ; la valeur est stockée dans la liste Llambda; le calcul est répété 100 000 fois.

```
Moylambda=sum(Llambda)/Iteration
ulambda=(1/(Iteration-1)*sum((np.array(Llambda)-Moylambda)**2.))**0.5

print('longueur d onde du laser :', Moylambda,' m')
print('u(lambda) :', ulambda,' m')
```

La valeur moyenne Moylambda et son incertitude ulambda sont calculées, puis affichées.

6 ECRIRE LE RÉSULTAT du mesurage

Estimation de la valeur du mesurande	**ET**	Incertitude-type de cette estimation :
y	**ET**	u(y)

2 possibilités présentées ici
sur les 4 propositions du GUM *§7.2.2.*

1 « **y avec une incertitude-type u(y)** » est une notation qui ne prête pas à confusion. Elle est à privilégier.

2 L'écriture $y \pm u(y)$ est déconseillée car il y a un risque de confusion entre u(y) (minuscule) qui est l'incertitude-type et U (y) (majuscule) qui est l'incertitude élargie.

Le concept d'incertitude élargie est désormais abandonné *§ 6.1.*

Si cette notation est malgré tout utilisée, il faut bien préciser « $y \pm u(y)$ avec u(y) incertitude-type », ce qui alourdit la notation. De plus, l'intervalle ainsi indiqué avec l'incertitude-type ne correspond pas aux intervalles de confiance habituellement associés à l'incertitude élargie.

Pour les **CHIFFRES SIGNIFICATIFS** : *§7.2.6.*

- ◊ Pour u(y), le GUM recommande 2 chiffres significatifs **au plus** (donc 1 ou 2 chiffres significatifs)
- ◊ Il est **PARFOIS** approprié d'arrondir u(y) au chiffre supérieur (par exemple 10,43 devient 11) mais **LE BON SENS PRÉVAUT** (par exemple 28,05 devient 28)
- ◊ La valeur y doit être arrondie **EN ACCORD** avec l'incertitude : le dernier chiffre de y doit occuper la même position que le dernier chiffre de u(y).

Par exemple,

y = 10,05762 Ω avec u(y) = 27 mΩ devient , en écrivant les deux valeurs dans la même unité et avec la même puissance de 10 :

y = 10,05762 Ω avec u(y) = 0,027 Ω

Le dernier chiffre de l'incertitude-type est celui des millièmes, d'où l'écriture du mesurage jusqu'au chiffre des millièmes :

y = 10,058 Ω avec u(y) = 0,027 Ω

Le dernier chiffre de la valeur du mesurage y est arrondi mathématiquement.

IV. ANNEXES

Expérimentations menées en classe

Toutes les situations présentées reprennent des **mesures d'élèves** effectuées en séances de travaux pratiques.

UN EXEMPLE EN CLASSE DE SECONDE

Mesure d'une masse

Exploitation sous forme d'histogramme

Au cours d'un TP un élève pèse un même objet sur les huit balances présentes dans la salle. L'objet est un cylindre d'aluminium. Les huit balances sont du même modèle.

La série des mesures d'un élève est reproduite ci-dessous, dans des conditions proches des conditions de répétabilité.

Balance n°	1	2	3	4	5	6	7	8
Masse (g)	55,47	55,46	55,45	55,43	55,41	55,47	55,47	55,47

Il faut couvrir l'intervalle [55.41-55.47] avec des classes qui couvrent l'intervalle [55.41-55.48[

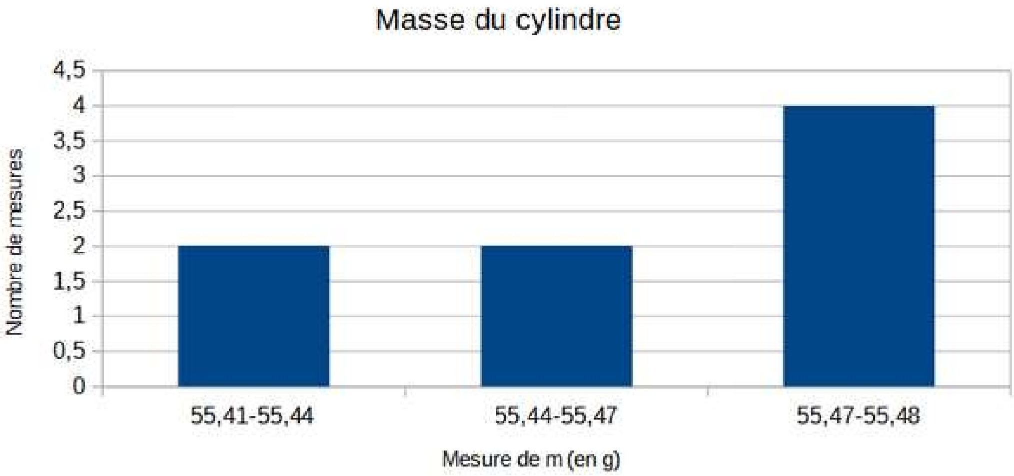
L'intervalle est $55.48 - 55.41 = 0{,}07$ g

Il y a 8 mesures ; le nombre de classes peut être choisi égal à $\sqrt{8} = 2.8$, soit 3 classes.

La classe est alors de largeur $\frac{0.07}{3} = 0{,}0233\text{g} = 0.03\text{g}$

Le regroupement des données en classes est dans ce cas :

Masse (g)	**Nombre de mesures**
[55.41 - 55.44[	2
[55.44 - 55.47[	2
[55.47 – 55.50[	4



On constate que la classe la plus nombreuse est 55,47 g – 55,50 g.

Calcul de la moyenne et de l'écart-type

La moyenne : $\overline{m} = 55{,}45375\ g$

L'écart-type expérimental, appelé écart-type : $s(m)$ = 0,0226384 g

L'écart-type expérimental de la moyenne, appelé incertitude-type et notée $u(\overline{m}) = 0{,}0080039$ g

La masse du cylindre est mesurée à 55,45 g avec une incertitude type de 0,01 g.

UN EXEMPLE EN CLASSE DE SECONDE

Mesure d'un indice de réfraction.

Exploitation sous forme d'histogramme

Dans ce TP, les élèves ont relevé les angles d'incidence et de réfraction à travers un hémi cylindre de plexiglas. Le relevé des coordonnées d'un point sur la courbe sin(i) = f(sin(r)) leur permet de mesurer l'indice de réfraction du plexiglas.

Les mesures de tous les élèves de la classe sont réunies dans le tableau ci-dessous, dans des conditions proches des conditions de répétabilité :

n	1.50	1.55	1.56	1.48	1.41	1.53	1.50	1.45	1.43	1.50	1.29	1.55	1.43

Il faut couvrir l'intervalle [1.29 – 1.56] avec des classes qui couvrent l'intervalle [1.29 – 1.57[

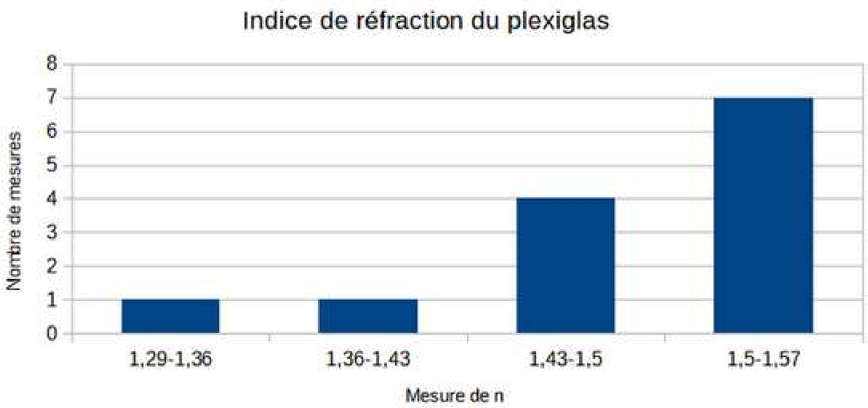
L'intervalle est $1.57 - 1.29 = 0.28$

Il y a 13 mesures ; avec un nombre de classes égal à $\sqrt{13} = 3.6$ on peut choisir 4 classes.

La classe est alors de largeur $\frac{0.28}{4} = 0{,}07\ \mathrm{g.mL^{-1}}$

Le regroupement des données en classes est dans ce cas :

n	**Nombre de mesures**
[1.29 – 1.36[	1
[1.36 – 1.43[	1
[1.43 – 1.50[	4
[1.50 – 1.57[	7



On constate que la classe la plus nombreuse est 1,50 – 1,57.

Calcul de la moyenne et de l'écart-type

La moyenne : $\bar{n} = 1{,}475384$

L'écart-type expérimental, *s*(*n*) = 0,0744553

L'écart-type expérimental de la moyenne, appelé incertitude-type :

$u(n) = \frac{0{,}0744553}{\sqrt{14}} = 0{,}019899 = 0{,}02$

L'indice de réfraction est mesuré à 1,48 avec une incertitude type de 0,02.

UN EXEMPLE EN CLASSE DE SECONDE

Mesure de la vitesse du son dans l'air.

Exploitation sous forme d'histogramme

Dans ce TP, les élèves ont calculé la vitesse du son dans l'air à partir de la mesure à l'oscilloscope du temps mis par un signal ultrasonore pour passer d'un émetteur à un récepteur qui lui fait face, la distance entre l'émetteur et le récepteur étant mesurée directement.

Les mesures de tous les élèves de la classe sont réunies dans le tableau ci-dessous, dans des conditions proches des conditions de répétabilité :

***v* (m.s^{-1})**	342	327	364	327	419	316	361	363	325	327	343	333	332

Il faut couvrir l'intervalle [316 - 419] avec des classes qui couvrent l'intervalle [316 - 420[

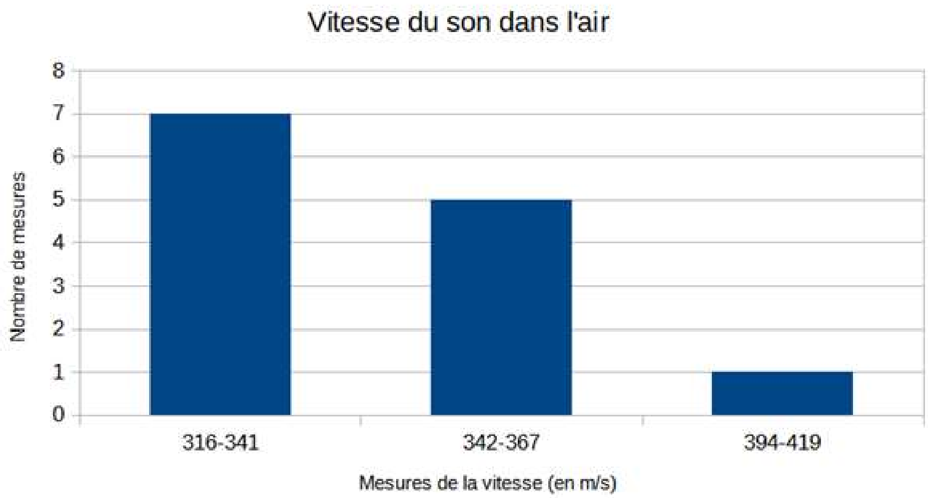
L'intervalle est $420 - 316 = 104$

Il y a 13 mesures ; avec un nombre de classes égal à $\sqrt{13} = 3.6$ on peut choisir 4 classes.

La classe est alors de largeur $\frac{104}{4} = 26\ \mathrm{m.s^{-1}}$

Le regroupement des données en classes est dans ce cas :

***v* (m.s^{-1})**	**Nombre de mesures**
[316 - 342[	7
[342 - 368[	5
[368 – 394[	0
[394 – 420[	1



On constate que la classe la plus nombreuse est comprise entre 316 m.s^{-1} et 341 m.s^{-1}.

Calcul de la moyenne et de l'écart-type

La moyenne : $\bar{v} = 344{,}538462$ m.s^{-1}

L'écart-type expérimental, $s(v)$ = 27,314878 m.s^{-1}

L'écart-type expérimental de la moyenne, appelé incertitude-type : $u(\bar{v}) = \frac{27{,}314878}{\sqrt{13}} = 7{,}57578 = 8$ m.s^{-1}

La vitesse du son dans l'air est mesurée à 345 m.s^{-1} avec une incertitude type de 8 m.s^{-1}.

UN EXEMPLE EN CLASSE DE SECONDE

Mesure d'une masse volumique.

Exploitation sous forme d'histogramme

Dans ce TP, les élèves ont calculé la masse volumique d'un liquide inconnu à partir de la mesure de la masse d'une éprouvette graduée de 25 mL, pesée tout d'abord vide et sèche, puis remplie de 25 mL de liquide. L'objectif était d'identifier l'éthanol.

Les mesures de tous les élèves de la classe sont réunies dans le tableau ci-dessous, dans des conditions proches des conditions de répétabilité :

ρ(g.mL^{-1})	0.756	1.09	0.750	0.750	0.772	0.781	0.774	0.789	0.776	1.105	0.821	0.821	0.802	0.762	0.785

Il faut couvrir l'intervalle [0.750 – 1.105] avec des classes qui couvrent l'intervalle [0.750 – 1.106[

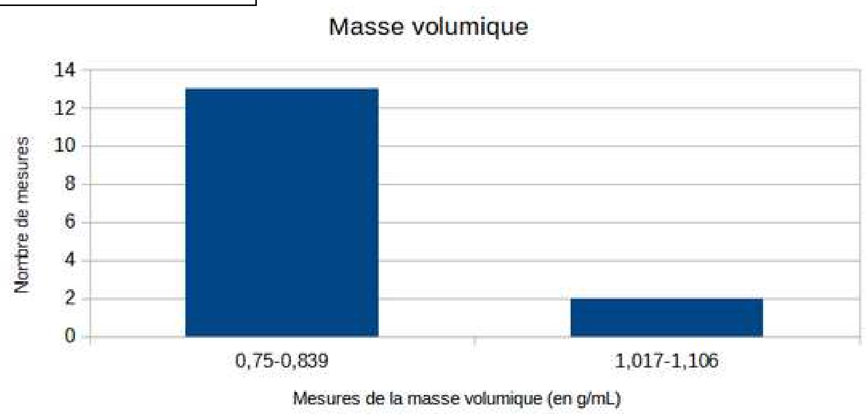
L'intervalle est $1.106 - 0.750 = 0.356$

Il y a 15 mesures ; avec un nombre de classes égal à $\sqrt{15} = 3.87$ on peut choisir 4 classes.

La classe est alors de largeur $\frac{0.356}{4} = 0{,}089\ \mathrm{g.mL^{-1}}$

Le regroupement des données en classes est dans ce cas :

ρ (g.mL^{-1})	**Nombre de mesures**
[0.750 – 0.839[	13
[0.893 – 0.928[	0
[0.928 – 1.017[	0
[1.017 – 1.106[	2



Une grande **utilité de l'histogramme** est de pouvoir rejeter des mesures manifestement fausses. On reprend le traitement des données en les retirant les deux mesures de la classe 1,017 – 1,106 :

ρ (g.mL^{-1})	0.756	0.750	0.750	0.772	0.781	0.774	0.789	0.776	0.821	0.821	0.802	0.762	0.785

Il faut couvrir l'intervalle [0.750 – 0.821] avec des classes qui couvrent l'intervalle [0.750 – 0.822]

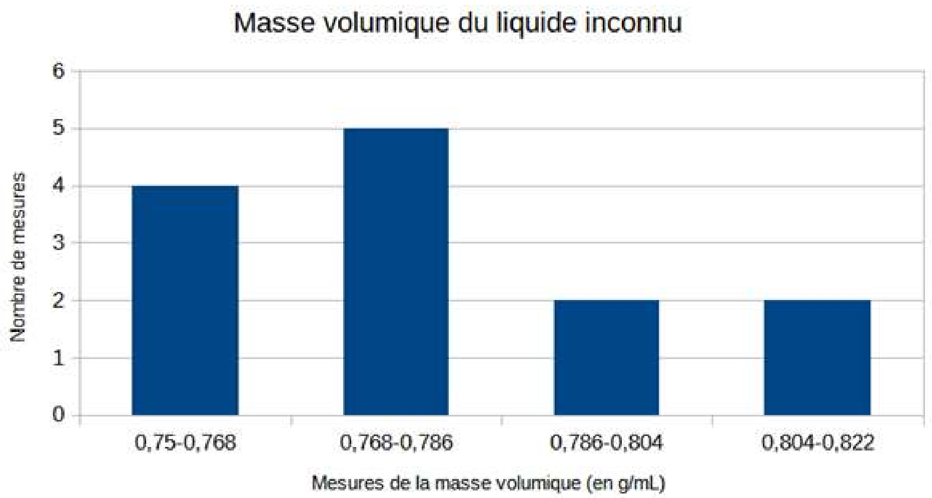
L'intervalle est $0.822 - 0.750 = 0.072$

On a conservé 13 mesures ; avec un nombre de classes égal à $\sqrt{13} = 3.6$ on peut choisir 4 classes.

La classe est alors de largeur $\frac{0.072}{4} = 0.018\ \mathrm{g.mL^{-1}}$

Le regroupement des données en classes est dans ce cas :

ρ (g.mL^{-1})	**Nombre de mesures**
[0.750 – 0.768[	4
[0.768 – 0.786[	5
[0.786 – 0.804[	2
[0.804 – 0.822 [	2



On constate que la classe la plus nombreuse est 0,768 g.mL^{-1} – 0,786 g.mL^{-1}.

Calcul de la moyenne et de l'écart-type

La moyenne : $\overline{\rho} = 0{,}79923$ g.mL^{-1}

L'écart-type expérimental, $s(\rho)$ = 0,0237503 g.mL^{-1}

L'écart-type expérimental de la moyenne, appelé incertitude-type :

$u(\overline{\rho}) = \frac{0{,}0237503}{\sqrt{13}} = 6{,}5871.10^{-3} = 0{,}007\ \mathrm{g.mL^{-1}}$

La masse volumique est mesurée à 0,799 g.mL^{-1} avec une incertitude type de 0,007 g.mL^{-1}.

Conclusion

La masse volumique de l'éthanol est de 0,780 g.mL^{-1}. On peut identifier le liquide inconnu comme étant de l'éthanol car :

- la valeur de référence est dans la classe la plus nombreuse de l'histogramme ;
- on constate que la valeur mesurée s'écarte de la valeur de référence de moins d'une incertitude-type (0,780 – 0,799 = 0,001 g.mL^{-1}). La valeur mesurée et la valeur de référence sont donc compatibles.

UN EXEMPLE EN CLASSE DE PREMIERE
Mesure d'un volume équivalent
- Incertitude-type de type B sur une lecture directe -

Au cours d'un TP colorimétrique des ions fer II par les ions permanganate, un élève lit sur une burette graduée la valeur du volume équivalent : V_E = 10,1 mL

Incertitude-type de type B

L'incertitude porte sur une mesure unique, il s'agit d'une incertitude-type de type B.
La burette porte l'indication ± 0,05 mL.
Par souci de simplification, on demande à l'élève de considérer que cette indication est l'incertitude-type :
$u(V_E)$ = 0,05 mL
L'élève peut écrire que : « le volume équivalent vaut 10,1 mL avec une incertitude type de 0,05 mL. »
Mais en exprimant l'incertitude-type au dixième près, comme la grandeur mesurée, l'élève écrira plutôt en conclusion que : « le volume équivalent vaut 10,1 mL avec une incertitude type de 0,1 mL. »

Incertitude-type de type A

Les mesures de tout le groupe de TP (8 binômes) ont été réunies :

V_E (mL)	10,1	10,2	10,3	11,1	11,3	11,3	10,5	10,2

On peut, comme en seconde, calculer l'incertitude-type de type A, les mesures ayant été faites dans des conditions proches des conditions de répétabilité.

- Calcul de la moyenne : $\overline{V_E} = 10{,}6\ mL$ est exprimée avec 3 chiffres significatifs, comme les données ;
- Calcul de l'écart-type expérimental, appelé écart-type : $s(V_E)$ = 0,52 mL valeur intermédiaire, non arrondie ;
- Calcul de l'écart-type expérimental de la moyenne, appelé incertitude-type $u(\overline{V_E}) =$ 0,19 mL avec 2 chiffres significatifs maximum.

Pour terminer, l'incertitude-type étant exprimée au dixième près, comme la grandeur mesurée. L'élève peut écrire que : « le volume équivalent vaut 10,6 mL avec une incertitude type de 0,2 mL. »

Un prolongement possible

Il est possible de tenir compte à la fois de l'incertitude-type de type A due aux 8 mesures effectuées et de l'incertitude-type de type B due à la burette. Le calcul de cette nouvelle incertitude-type est fait par le professeur, les notions associées d'incertitude-type composée n'étant pas au programme en première. En classe de terminale, les élèves peuvent faire le calcul, la formule étant fournie par le professeur :

$u_C(V_E) = \sqrt{u_A^2(\overline{V_E}) + u_B^2(V_E)}$

La première incertitude a été déterminée : $u_A\ (\overline{V_E}) = 0{,}19\ mL$

La deuxième incertitude est lue sur la burette : $u_B\ (V_E) = 0{,}05\ mL$

$u_C(V_E) = \sqrt{0{,}19^2 + 0{,}05^2}$

$u_C(V_E) = 0{,}196\ mL = 0{,}2\ mL$ incertitude-type de la mesure du volume équivalent.

UN EXEMPLE EN CLASSE DE PREMIERE
Mesure de la vitesse du son dans l'air
- Incertitude-type de type B : exploitation d'une fonction affine -

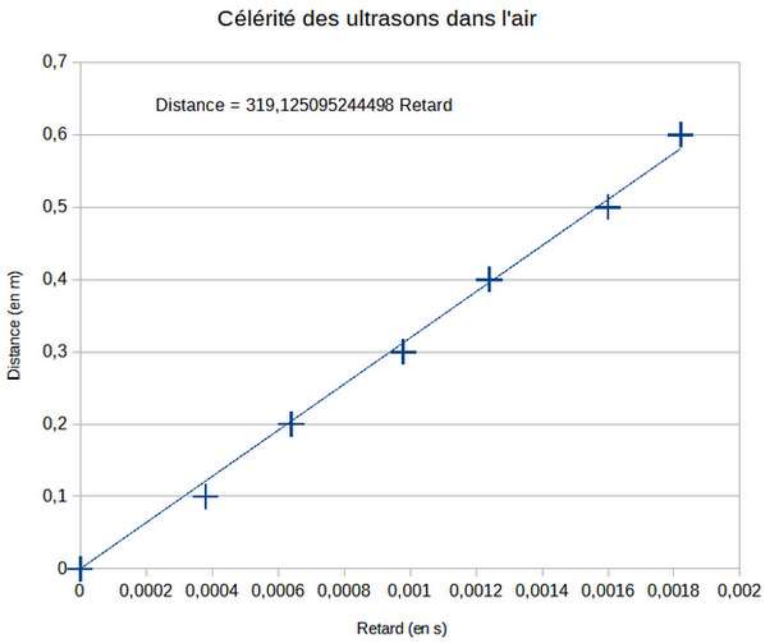
Au cours d'un TP, un élève doit mesurer la vitesse du son dans l'air à partir d'une série de mesures. Pour cela, il place un émetteur et un récepteur ultrasonore face à face. Pour différentes distances d entre l'émetteur et le récepteur, il mesure à l'oscilloscope (logiciel Oscillo 5) le décalage temporel τ entre l'émission et la réception.

Les mesures effectuées sont reproduites ci-dessous :

d (en cm)	0	10,0	20,0	30,0	40,0	50,0	60,0
τ (en µs)	0	380	640	980	1240	1600	1820

L'élève trace la courbe *d* = f(τ) et la modélise par une fonction linéaire, par exemple à l'aide d'un tableur.
Une notice explicative est fournie dans la partie II. Fiches pratiques à destination des élèves.

Ensuite il utilise les fonctionnalités du tableur pour déterminer l'incertitude-type sur le coefficient directeur.
Le mode opératoire est décrit dans la fiche pratique « Tracer une courbe à l'aide d'un tableur » fournie dans la partie II. Fiches pratiques à destination des élèves.



Dans l'exemple proposé ici, l'élève a obtenu *v* = 319,1250 m.s^{-1} avec une incertitude-type *u*(*v*) = 4,5973 m.s^{-1}.

319,1250952	k
4,597333761	u(k)

En cohérence avec les chiffres significatifs des mesures, il donne sa réponse sous la forme :
v = 319 m.s^{-1} avec une incertitude-type *u*(*v*) = 5 m.s^{-1}.

UN EXEMPLE EN CLASSE DE TERMINALE
Dosage conductimétrique

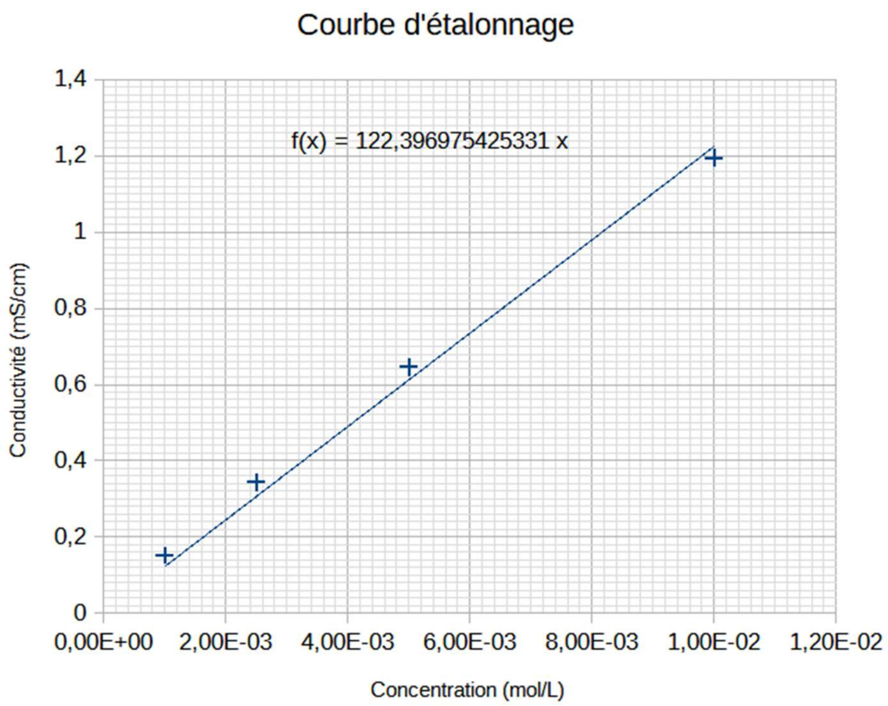
Un TP de dosage par étalonnage conductimétrique propose aux élèves de déterminer la concentration en masse (en chlorure de sodium) d'une solution de sérum physiologique, et de vérifier si cette solution convient bien pour un usage médical, c'est-à-dire si sa concentration est bien égale à 9,0 g.L^{-1}.

Exploitation d'une fonction affine

Dans un premier temps, les élèves mesurent la conductivité de 4 solutions étalon qui sont à leur disposition, ce qui leur permet de tracer la courbe d'étalonnage. Les outils du tableur permettent de déterminer le coefficient directeur k de cette courbe ainsi que son incertitude-type *u*(*k*).
Les résultats obtenus par un élève à l'aide d'un tableur sont reproduits ici.

Concentration (mol/L)	**Conductivité (mS/cm)**
1,00E-03	0,152
2,50E-03	0,344
5,00E-03	0,647
1,00E-02	1,194

122,396975425331	**k**
3,34722704603666	**u(k)**



Dans un deuxième temps, la solution de sérum physiologique est diluée 20 fois à l'aide d'une pipette jaugée de 5,0 mL pour laquelle $u(V_{pipette})$ = 0,015 mL et d'une fiole jaugée de 100,0 mL pour laquelle $u(V_{fiole})$ = 0,10 mL. Les élèves mesurent la conductivité de la solution ainsi préparée, et calculent, à l'aide du coefficient directeur *k* de la courbe d'étalonnage, la concentration massique de la solution diluée. Ils en déduisent la concentration massique du sérum physiologique étudié.

Les résultats obtenus par l'élève sont : $\sigma = 0{,}852\ \mathrm{mS.cm^{-1}}$ avec $k = 122$
L'unité de *k* non précisée ici, non demandée aux élèves pour éviter les problèmes de conversion pour ce premier TP de l'année (on constate que l'unité de *k*, en mS.mol.cm^{-1}.L^{-1} est en effet bien peu satisfaisante à bien des égards...)

$C_m = M.C = M.\frac{\sigma}{k}$ pour la solution diluée 20 fois

$C_{0m} = 20.C_m = 20.M.\frac{\sigma}{k}$ pour la solution de sérum physiologique.

$C_{0m} = 20 \times 58{,}5 \times \frac{0{,}852}{122} = 8{,}17\ \mathrm{g.L^{-1}}$ concentration en masse du sérum physiologique étudié.

Composition des incertitudes, la formule étant fournie

L'énoncé indique aux élèves que : « L'incertitude-type sur la valeur mesurée de C_{0m} dépend des incertitudes-type de toutes les mesures qui interviennent dans le calcul de C_{0m} : la mesure du volume dans la pipette, la mesure du volume dans la fiole, la mesure de la conductivité σ, la mesure du coefficient directeur *k*. »

L'élève est invité à relever l'incertitude de la verrerie utilisée, et l'incertitude sur la mesure de la conductivité est donnée. Il dispose ainsi les valeurs de l'incertitude-type de chaque grandeur : $u(V_{pipette})$ = 0,015 mL ; $u(V_{fiole})$ = 0,10 mL ; $u(\sigma)$ = 0,001 mS.cm^{-1} et $u(k)$ = 3,35 (unité non précisée ici).

La formule de composition des incertitudes (*se reporter à la partie III.5.0 et 5.2 pour les formules de composition des incertitudes*) est donnée dans l'énoncé :

$$u(\mathrm{C}_{0m}) = |C_{0m}| \times \sqrt{\left(\frac{u(V_{pipette})}{V_{pipette}}\right)^2 + \left(\frac{u(V_{fiole})}{V_{fiole}}\right)^2 + \left(\frac{u(k)}{k}\right)^2 + \left(\frac{u(\sigma)}{\sigma}\right)^2}$$

L'élève fait l'application numérique et obtient l'incertitude-type sur la mesure de la concentration en masse de la solution de sérum physiologique :

$$u(\mathrm{C}_{0m}) = |8{,}17| \times \sqrt{\left(\frac{0{,}015}{5{,}0}\right)^2 + \left(\frac{0{,}10}{100{,}0}\right)^2 + \left(\frac{3{,}35}{122}\right)^2 + \left(\frac{0{,}001}{0{,}852}\right)^2}$$

$u(\mathrm{C}_{0m}) = 0{,}225\ \mathrm{g.L^{-1}} = 0{,}23\ \mathrm{g.L^{-1}}$ avec un maximum de deux chiffres significatifs (*Cf. partie III.6.*).

Ecriture du résultat

En cohérence avec la mesure de $C_{0m} = 8{,}17\ \mathrm{g.L^{-1}}$, l'incertitude-type doit être donnée jusqu'au chiffre des centièmes : $u(\mathrm{C}_{0m}) = 0{,}23\ \mathrm{g.L^{-1}}$ convient (*Cf. partie III.6.*).

Comparaison quantitative entre le résultat et la valeur de référence

La comparaison entre un résultat et une valeur de référence se fait en terminale avec l'outil (*Cf Partie I.4.1.*):

$$\frac{|\boldsymbol{m_{mes}} - \boldsymbol{m_{ref}}|}{\boldsymbol{u(m)}}$$

Si ce rapport indique que l'écart entre la valeur mesurée et la valeur de référence $m_{mes} - m_{ref}$ est du même ordre de grandeur que l'incertitude-type u(m), alors on peut conclure que « la valeur mesurée m_{mes} est compatible avec la valeur de référence m_{ref}. »

Ici l'élève calcule le rapport : $\frac{|C_{0m\,mes} - C_{m\,ref}|}{u(C_m)} = \frac{|8{,}17-9{,}0|}{0{,}23} = 3{,}6$

Il constate que : $\frac{|C_{0m\,mes} - C_{m\,ref}|}{u(C_m)} < 5$

Donc l'écart entre la valeur mesurée et la valeur de référence est du même ordre de grandeur que l'incertitude-type.

L'élève peut conclure que « la valeur mesurée 8,17 g.L^{-1} est compatible avec la valeur de référence 9,0 g.L^{-1}. La solution de sérum physiologique titrée correspond à un usage médical».

UN EXEMPLE EN CLASSE DE TERMINALE
Composer les incertitudes
- La formule étant fournie -

Le titrage pH-métrique d'un vinaigre propose aux élèves de déterminer le pourcentage massique en acide éthanoïque pour vérifier l'indication de l'étiquette « 8% en masse minium ».
Les élèves titrent un volume $V_{titré} = 10{,}0\ \mathrm{mL}$ de vinaigre dilué 10 fois, par une solution d'hydroxyde de sodium de concentration $C_{titrante} = 1{,}00.10^{-1}\mathrm{mol.L^{-1}}$

<u>Dans un premier temps</u>, avec les mesures obtenues, les élèves tracent la courbe *pH* = *f*(*V*) à l'aide du tableur CALC de LIBREOFFICE. (*Cf partie II. Fiches pratiques à destination des élèves*). A l'aide de la méthode des tangentes, ils déterminent la valeur du volume équivalent V_E puis en déduisent la valeur du pourcentage massique *P* en acide éthanoïque du vinaigre.

Un élève obtient V_E = 15,2 mL.
L'expression du pourcentage massique est ici : $P = 10.\frac{C_{titrante}.V_E}{V_{titré}}.\frac{M}{d.\rho_{eau}}$

$$P = 10 \times \frac{1{,}00.10^{-1}.15{,}2.10^{-3}}{10{,}0.10^{-3}} \times \frac{60{,}0}{1{,}05\times1000}$$
$$P = 0{,}0869$$
$$P = 8{,}69\ \%$$

<u>Dans un deuxième temps</u>, on demande à l'élève de comparer le pourcentage massique déterminé expérimentalement à la donnée de l'étiquette.
Pour cela, il calcule l'incertitude-type composée à l'aide de la formule fournie dans l'énoncé :

$$u(P_{exp}) = P_{exp}\sqrt{\left(\frac{u(V_E)}{V_E}\right)^2 + \left(\frac{u(V_{titré})}{V_{titré}}\right)^2 + \left(\frac{u(V_{pipet\quad})}{V_{pipette}}\right)^2 + \left(\frac{u(V_{fiole})}{V_{fiole}}\right)^2}$$

$V_{pipette}$ et V_{fiole} font référence à la verrerie utilisée pour la dilution du vinaigre.
On remarque que le choix a été fait de ne pas tenir compte de l'incertitude-type de la concentration de la solution titrante (ni de celle de la densité du vinaigre, de *M* et ρ_{eau}).

L'élève relève sur la verrerie utilisée les valeurs des incertitudes-type :
$u(V_E) = 0{,}05\ \mathrm{mL}$ sur la burette graduée de 25 mL
$u(V_{titré}) = 0{,}03\ \mathrm{mL}$ sur la pipette jaugée de 10,0 mL
$u(V_{pipette}) = 0{,}01\ \mathrm{mL}$ sur la pipette jaugée de 5,0 mL
$u(V_{fiole}) = 0{,}05\ \mathrm{mL}$ sur la fiole jaugée de 50,0 mL
L'élève doit évaluer lui-même l'incertitude-type sur la mesure de V_E, par exemple la plus petite graduation lisible sur la courbe *pH* = *f*(*V*) en tenant compte de l'échelle : $u(V_E)$ = 0,1 mL. Cette valeur peut être plus grande selon la qualité de la courbe et de la méthode des tangentes.

$$u(P_{exp}) = 8{,}69 \times \sqrt{\left(\frac{0{,}1}{15{,}2}\right)^2 + \left(\frac{0{,}03}{10{,}0}\right)^2 + \left(\frac{0{,}01}{5{,}0}\right)^2 + \left(\frac{0{,}05}{50{,}0}\right)^2}$$
$$u(P_{exp}) = 0{,}07\ \%$$

<u>En conclusion</u>, *P* = 8,69 % avec une incertitude-type de 0,07 %

UN EXEMPLE EN CLASSE DE TERMINALE
Composer les incertitudes à l'aide d'une simulation
Tracer un histogramme à l'aide d'un langage de programmation

Les élèves prennent en photo une figure d'interférences, à l'aide d'une webcam. Un logiciel (SalsaJ) leur permet de mesurer la distance de plusieurs interfranges avec 3 chiffres significatifs. La mesure ainsi effectuée de l'interfrange i leur permet de déduire la valeur de la longueur d'onde du laser utilisé, à l'aide de la relation : $\lambda = \frac{i \times b}{D}$.

Un élève a obtenu les mesures suivantes, avec un écartement b = 100 µm des fentes de Young :
D = 1,50 m à l'aide d'un mètre à ruban ; 4*i* = 3,84 cm sur le logiciel SalsaJ.
Il en déduit *i* = 0,960 cm et $\lambda = \frac{0{,}960.10^{-2} \times 100.10^{-6}}{1{,}50} = 6{,}40.\,10^{-7}\,\mathrm{m}$

L'incertitude sur la valeur de *b* est donnée par le constructeur : *u*(*b*) = 1µm
Les autres incertitudes sont estimées par l'élève, en fonction de la qualité de ses mesures. Par exemple, un élève a estimé : *u*(*D*) = 1 cm
u(4*i*) = 1 mm, donc *u*(*i*) = 0,25 mm

Un programme Python est fourni par le professeur. L'élève intervient uniquement dans une partie du programme, reproduite ci-dessous, pour indiquer les valeurs des grandeurs et leurs incertitudes-types :

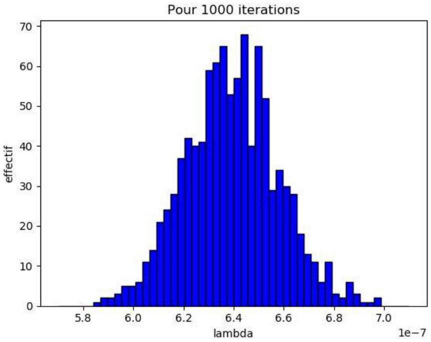
```
##########################################################################
###                    DEBUT DE LA PARTIE A MODIFIER                   ###
##########################################################################
#Entrées
i=[valeur de i,incertitude type sur i]
b=[valeur de b,incertitude type sur b]
D=[valeur de D,incertitude type sur D]
##########################################################################
###                    FIN DE LA PARTIE A MODIFIER                   ###
##########################################################################
```

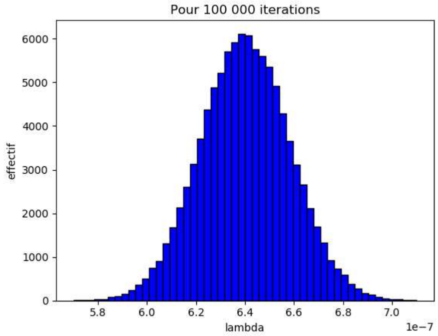
L'élève exécute le programme qui lui fournit les informations suivantes :

```
longueur d onde du laser : 6.401098456610537e-07  m
u(lambda) : 1.8383899046205295e-08  m
```

Il peut conclure que λ = 6,40.10^{-7} m avec une incertitude-type *u*(λ) = 0,18.10^{-7} m

Le programme Python peut éventuellement se terminer avec l'affichage de l'histogramme des valeurs calculées de λ, ce qui permet de vérifier que le nombre d'itérations prévues par le professeur est suffisant.





L'histogramme de gauche n'a pas l'allure d'une loi normale : 1000 itérations ne suffisent pas.

L'histogramme de droite a bien l'allure d'une loi normale : 100 000 itérations suffisent.